Блок 10. Комбинаторика

Подготовительное занятие. Задания

- Сколько существует пятизначных чисел?
  А сколько пятизначных чисел, состоящих только из чётных цифр?
  А сколько чисел, десятичная запись которых состоит из 5 ненулевых цифр и одной запятой?
- В алфавите племени Мумба–Бумба всего три буквы: Б, У и М. Словом считается любая непустая последовательность не более чем из четырех букв. Сколько всего слов в языке племени Мумба–Бумба?

1. (а) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать стрелку с началом в одной отмеченной точке и концом в другой отмеченной точке. Сколько можно нарисовать разных стрелок?
   (б) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать отрезок, оба конца которого в отмеченных точках. Сколько можно нарисовать разных отрезков?
2. (а) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих: командира и его заместителя?
   (б) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих дежурных, которые будут сегодня чистить картошку?
3. Во дворе играют три группы ребят. В каждой группе любые двое в ссоре, а ребята из разных групп не ссорятся. В первой группе 3 человека, во второй группе 7 человек, в третьей группе 4 человека. Сколькими способами можно выбрать мирную компанию из трёх ребят, в которой нет ссор друг с другом?
4. (а) Сколько существует четырехзначных чисел с суммой цифр 34?
   (б) Сколько существует 10-значных чисел с суммой цифр 88?
5. Сколько восьмизначных чисел, цифры которых убывают?
6. Сколько существует трехзначных чисел, у которых в записи есть хотя бы один ноль?
7. (а) Сколько можно составить 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?
   (б) Сколько можно составить 4-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?
8. Сколько существует двузначных чисел, у которых сумма цифр не менее произведения цифр?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2019-2020 учебный год

Блок 10. Комбинаторика

Подготовительное занятие. Задания

- Сколько существует пятизначных чисел?
  А сколько пятизначных чисел, состоящих только из чётных цифр?
  А сколько чисел, десятичная запись которых состоит из 5 ненулевых цифр и одной запятой?
- В алфавите племени Мумба–Бумба всего три буквы: Б, У и М. Словом считается любая непустая последовательность не более чем из четырех букв. Сколько всего слов в языке племени Мумба–Бумба?

1. (а) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать стрелку с началом в одной отмеченной точке и концом в другой отмеченной точке. Сколько можно нарисовать разных стрелок?
   (б) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать отрезок, оба конца которого в отмеченных точках. Сколько можно нарисовать разных отрезков?
2. (а) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих: командира и его заместителя?
   (б) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих дежурных, которые будут сегодня чистить картошку?
3. Во дворе играют три группы ребят. В каждой группе любые двое в ссоре, а ребята из разных групп не ссорятся. В первой группе 3 человека, во второй группе 7 человек, в третьей группе 4 человека. Сколькими способами можно выбрать мирную компанию из трёх ребят, в которой нет ссор друг с другом?
4. (а) Сколько существует четырехзначных чисел с суммой цифр 34?
   (б) Сколько существует 10-значных чисел с суммой цифр 88?
5. Сколько восьмизначных чисел, цифры которых убывают?
6. Сколько существует трехзначных чисел, у которых в записи есть хотя бы один ноль?
7. (а) Сколько можно составить 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?
   (б) Сколько можно составить 4-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?
8. Сколько существует двузначных чисел, у которых сумма цифр не менее произведения цифр?

karusel.desc.ru ~ 271 ~

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено начальным идеям комбинаторики. Повторяются правила сложения и умножения, рассматривается способ двойного подсчёта, а также идея дополнения (задачи № 6, № 7 (а), № 7 (б)).

В первой части занятия можно разобрать задачи «с точкой», обсудить с учениками правила умножения и сложения. Задачи «с номерами» для самостоятельного решения на занятии. Рекомендуем в середине занятия разобрать задачи № 1 и № 2, а позже разобрать задачу № 5 как пример использования идеи дополнения.

Напоминаем, что знаком [?] отмечаем моменты, которые можно обсудить с учениками подробнее.

Предлагаем в начале дать задачи, в которых школьники могут просто найти ответ. Если до этого занятия не было никаких задач по комбинаторике, то можно сразу обсудить эти задачи.

- (а) Сколько существует пятизначных чисел?
  (б) Сколько пятизначных чисел, состоящих только из чётных цифр?
  (в) Сколько чисел, десятичная запись которых состоит из 5 ненулевых цифр и одной запятой?

    (а) Ответ: 90 000.

    Решение 1. Пятизначные числа от 10 000 до 99 999. Из 99 999 чисел от 1 до 99 999 надо убрать 9 999 чисел от 1 до 9 999. Останется 99 999 – 9 999 = 90 000 пятизначных чисел.

    Комментарий. Здесь полезно понять, почему решение 99 999 – 10 000 = 89 999 не является верным [?].

    Решение 2. Будем составлять число из цифр.

    На первое место можно поставить любую из 9 цифр (от 1 до 9, а цифру 0 ставить нельзя).

    Какая бы цифра не стояла первой, на второе место можно поставить любую из 10 цифр (от 0 до 9). Итого $9 \cdot 10$ вариантов из первых двух цифр.

    Какие бы ни были первые две цифры, на третье место можно поставить любую из 10 цифр (от 0 до 9). Итого $(9 \cdot 10) \cdot 10$ вариантов из первых трёх цифр.

    Аналогично рассуждая, получаем $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ вариантов из первых четырёх цифр, а затем $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$ пятизначных чисел.

    Комментарий. В решении № 2 объясняется *правило умножения* вариантов, которое нужно использовать при решении следующих задач.

    (б) Решение. Рассуждая аналогично (см. пункт (а)), на первое место можно поставить любую из 4 цифр (цифры 2, 4, 6 или 8), для каждого из четырёх следующих мест выбор из 5 вариантов (цифры 0, 2, 4, 6 или 8). Значит, существует всего $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2\,500$ пятизначных чисел из чётных цифр.

    (в) Решение. Составим сначала пятизначное число из ненулевых цифр. На каждое место можно поставить любую из 9 цифр, поэтому существует всего $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ вариантов. В каждое такое число можно поставить запятую 4 способами (после 1-ой, 2-ой, 3-ей или после 4-ой цифры). Значит, нужных чисел всего $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 236\,196$ штук.

    Комментарий. В качестве ответа в комбинаторных задачах принято оставлять ответ в виде произведения, например, так: $9^5 \cdot 4$. От учеников 5-6 класса, конечно, такое ожидать не нужно.

- В алфавите племени Мумба–Бумба всего три буквы: Б, У и М. Словом считается любая непустая последовательность не более чем из четырех букв. Сколько всего слов в языке племени Мумба–Бумба?

    Ответ: 120.

    Решение. Слово может состоять из 1, 2, 3 или 4 букв. Рассмотрим 4 случая.
    (1) Если буква одна, то слова три: Б, У и М.
    (2) Если буквы две, то слов $3 \cdot 3 = 9$.
    (3) Если буквы три, то слов $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
    (4) Если буквы четыре, то слов $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
    Всего $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ слов.

    Комментарий. Правило сложения — способ, когда искомые объекты разбиваются на группы, в которых удобно посчитать число объектов. Затем результаты складываются.
    В данном случае, все слова разбиты на группы с одинаковым числом букв. В каждом случае удобно использовать правило умножения.

Задачи листочка, которые предлагаются для самостоятельного решения на занятии.

1. (а) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать стрелку с началом в одной отмеченной точке и концом в другой отмеченной точке. Сколько можно нарисовать разных стрелок?

    Ответ: 2450.

    Решение. В любой из 50 точек можно начать стрелку. После выбора начала конец стрелки может в любой из 49 оставшихся точек. Всего $50 \cdot 49 = 2450$ стрелок.

   (б) На прямой отмечено 50 точек. Можно нарисовать отрезок, оба конца которого в отмеченных точках. Сколько можно нарисовать разных отрезков?

Ответ: 1225.

Решение 1 (использование пункта (а)). Заметим, что отрезков вдвое меньше, чем стрелок, так как вдоль каждого отрезка можно нарисовать 2 стрелки (в одну и в другую стороны). Значит, можно нарисовать 2450 : 2 = 1225 отрезков.

Решение 2 (тех, кто умеет решать такие задачи). Один конец отрезка выбираем 50 способами. Каждому из этих способов соответствует 49 способов выбрать другой конец отрезка. Всего 50 · 49 = 2450 выборов. При этом каждый отрезок посчитали 2 раза: один раз первым выбрали левый конец отрезка, другой раз — правый.

- Комментарий. Полезно рассмотрение как решения 1, так и решения 2 задачи № 1.

2. (а) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих: командира и его заместителя?

   (б) Сколькими способами в отряде из 50 школьников можно выбрать двоих дежурных, которые будут сегодня чистить картошку?

   Ответ: (а) 2450, (б) 1225.

   Указание. Можно рассуждать аналогично решению задачи № 1. Школьников можно считать «точками». Тогда выбор командира и заместителя — выбор стрелки от первого ко второму. Выбор двух дежурных — выбор отрезка, в котором концы равноправны.

- Можно сформулировать общее правило: если надо выбрать 2 предмета из N штук, но не важен порядок выбора, то всего N · (N – 1) : 2 вариантов выбора.
- Можно устно обсудить решение следующих аналогичных вопросов:

✓ Сколькими способами в одну ячейку таблицы 3 × 3 можно поставить крестик, а одну другую ячейку — нолик?

Ответ: 72.

Решение. Клетку для крестика выбираем 9 способами, а клетку для нолика – любую из 8 оставшихся. Всего 9 · 8 : 2 = 72 варианта.

✓ Сколькими способами в две ячейки таблицы 3 × 3 можно поставить по одному крестику?

Ответ: 36.

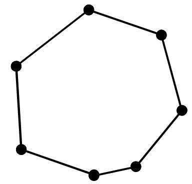
Решение. Надо выбрать пару ячеек из 9 штук. Порядок выбора не важен, поэтому всего 9 · 8 : 2 = 36 отрезков.

✓ На окружности отмечены 7 точек. Сколько можно нарисовать отрезков с концами в этих точках?

Ответ: 21.

Решение. Чтобы получить отрезок, надо выбрать пару точек, являющихся его концами. Порядок выбора не важен, поэтому всего 7 · 6 : 2 = 21 отрезков.

✓ Сколько диагоналей в семиугольнике, показанном на рисунке справа?



Ответ: 14.

Решение. Первый конец диагонали можно выбрать 7 способами, второй — только 4 способами [?]. Порядок выбора не важен, поэтому всего 7 · 4 : 2 = 14 диагоналей.

3. Во дворе играют три группы ребят. В каждой группе любые двое в ссоре, а ребята из разных групп не ссорятся. В первой группе 3 человека, во второй группе 7 человек, в третьей группе 4 человека. Сколькими способами можно выбрать мирную компанию из трёх ребят, в которой нет ссор друг с другом?

   Ответ: 84.

   Решение. Заметим, что в мирную компанию надо взять ребят из разных групп. Из первой можно выбрать кандидата в компанию 3 способами, из второй — 7 способами, из третьей — 4 способами. Итого (по правилу умножения) 3 · 7 · 4 = 84 способа.

4. (а) Сколько существует четырехзначных чисел с суммой цифр 34?

   Ответ: 10.

   Решение. Все такие числа получаются перестановкой цифр в числах 9997 и 9988. Первое число дает 4 варианта: 9997, 9979, 9799 и 7999.

   Второе — 6 вариантов: 9988, 9898, 8998, 9889, 8989 и 8899.

   Всего: 4 + 6 = 10 штук.

   Замечание. По какому принципу 6 вариантов второго случая записаны именно в таком порядке? Это полезно обсудить, так как перебирать варианты стоит в каком-то порядке.

   (б) Сколько существует 10-значных чисел с суммой цифр 88?

   Ответ: 55.

Решение. Запишем число из 10 цифр «9»: 9 999 999 999. Сумма его цифр равна 90. Чтобы получить число с суммой цифр 88, надо либо одну цифру уменьшить на 2, либо какие-то две цифры уменьшить на 1 каждую.

В первом случае 10 вариантов.

Во втором случае первую девятку для уменьшения выбираем 10 способами, вторую — 9 способами. Всего 90 случаев. При этом каждую пару посчитали дважды. Поэтому, всего 90 : 2 = 45 пар. Каждой паре соответствует нужное число с суммой цифр 88.

Всего: 10 + 45 = 55 штук.

Замечание. Можно первую цифру для уменьшения выбрать 10 способами, а вторую также 10 способами. Почему же тогда ответы $10 \cdot 10 = 100$ и $10 \cdot 10 : 2 = 50$ являются неверными?

5. Сколько восьмизначных чисел, цифры которых убывают?

Ответ: 45.

Решение. Запишем 10-значное число 9876543210. Выберем 2 цифры, которые надо убрать: первую — 10 способами, вторую — 9 способами. Порядок выбора не важен, поэтому всего $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способов (и искомых чисел).

Комментарий. А сколько восьмизначных чисел, цифры которых возрастают? Столько же, потому что они получаются из тех, где цифры возрастают, перевёртыванием записи? Пример: 98765432 ↔ 23456789.

Ответ: нет, не столько, так как после переворота число запись может начинаться с нуля, а такой записи числа нет.

6. Сколько существует трехзначных чисел, у которых в записи есть хотя бы один ноль?

Ответ: 171.

Замечание. Возможно переборное решение. Полезно, в частности, обсудить, как перебрать все трехзначные числа, в записи которых есть нули.

Решение. Всего 900 трёхзначных чисел [?]. Сколько из них чисел, в записи которых нет цифры «0»? В таком числе первую цифру можно выбрать 9 способами, вторую 9 способами и третью 9 способами. Итого $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Значит, цифру «0» содержат остальные 900 – 729 = 171 число.

Комментарий. Заметьте, иногда выгодно найти количество не тех объектов, которые подходят под условие, а наоборот, тех, которые не подходят. Эту важную идею нужно обсудить с учениками на примере этой задачи.

7. (а) Сколько можно составить 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?

Ответ: 3005.

Решение. Всего из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$ чисел. Не подходят те числа, в которых все цифры различны. Их количество равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Остальные 3125 – 120 = 3005 чисел подходят.

(б) Сколько можно составить 4-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5 в каждом из которых какая-то цифра встречается не менее двух раз?

Ответ: 505.

Решение. Всего из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ чисел. Не подходят те числа, в которых все цифры различны. Выберем одну цифру, которой нет (5 случаев), из остальных 4 цифр можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ числа. Остальные $625 - 24 \cdot 5 = 625 - 120 = 505$ чисел подходят.

8. Сколько существует двузначных чисел, у которых сумма цифр не менее произведения цифр?

Ответ: 27.

Решение. Все числа с цифрой «1» подходят. Их количество — 18.
Все числа с цифрой «0» подходят. Их количество — 9.
Число 10 учли дважды, поэтому всего 18 + 9 – 1 = 26 чисел.
Если обе цифры более 2, то число не подходит.
Из чисел, неучтенных ранее, с цифрой «2» подходит только число 22.
Итого: 26 + 1 = 27 чисел.