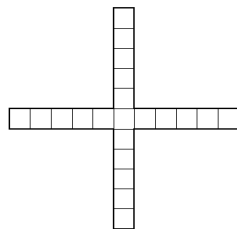


Блок 10. Комбинаторика

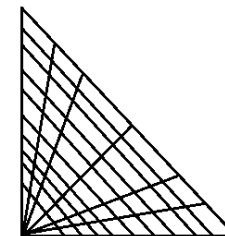
Задания Интернет-карусели

1. Володя составил свой словарь: выписал все слова из 6 букв, где на 1, 3 и 5 местах стоят в некотором порядке согласные буквы В, Л и Д, а на 2, 4 и 6 местах в некотором порядке гласные буквы О, О, Я. Сколько слов в словаре Володи?
2. Вася выписал все числа, получаемые из числа 122225 перестановкой цифр, которые больше полумиллиона. Сколько чисел выписал Вася?
3. Пятеро девочек Софья, Александра, Арина, Кира и Дарья выстроились в шеренгу одиночных пикетов «за все хорошее против всего плохого». Кира стоит не рядом с Дарьей. Сколько есть вариантов расположения девочек в этой шеренге?
4. Переплетчик должен переплести 11 разных книг. Каждую из них можно переплести либо в красный переплет, либо в синий, при этом каждый цвет должен быть использован хотя бы один раз. Сколькими способами он может это сделать?
5. Есть «доска» из 21 клетки в виде креста, изображенного на рисунке. Сколькими способами можно поставить две ладьи (белую и чёрную) (а) в соседние по стороне клетки; (б) *бьющие* друг друга; (в) *не бьющие* друг друга?
6. Сколькими способами можно расставить на шахматную доску 8×8 несколько (более одного) одинаковых коней так, чтобы каждый конь бил ровно четырёх других?
7. Оленька решила купить мороженое пломбир. В магазине есть 10 видов пломбира. Она хочет так выбрать 6 штук, чтобы среди них нашлось два одинаковых (чтобы было не жалко поделится с сестрой Шурочкой). Сколькими способами Оленька может сделать такую покупку?
8. Есть стандартная колода из 36 карт. Сколькими способами можно выбрать из неё
(а) три карты так, чтобы среди них был ровно два туза;
(б) три карты так, чтобы среди них был ровно один туз?
(в) три карты *разной масти* так, чтобы среди них был ровно один туз?
9. В алфавите Мурзиков есть буквы М, У, Р, Ъ. Известно, что слова в словаре Мурзиков не начинаются с Ъ и состоят из не более чем 4 символов. Какое наибольшее число слов может быть в словаре Мурзиков?
10. У Петра Ивановича есть задачник, где по теме «Комбинаторика» есть только 7 задач разной сложности. Ему необходимо из них составить контрольную работу из 5 задач,



стоящих в порядке возрастания сложности. Сколькими способами он может ее составить, используя только задачник?

11. В задачнике Петра Ивановича есть 10 арифметических примеров разной сложности. Нужно составить контрольную работу из 8 примеров, стоящих в порядке возрастания сложности. Вася умеет считать только 5 из данных 10 примеров. Сколькими способами можно составить контрольную работу, в которой Вася может решить хотя бы одно задание?
12. В задачнике Петра Ивановича есть задачи по теме «Уравнения». На уровень сложности 1, 2, 3 — по 10 задач, на уровни сложности 4, 5, 6, 7 — по 2 задачи. Нужно составить контрольную из 5 задач в порядке возрастания сложности (задачи одинаковой сложности в контрольной не могут встречаться). Сколько у Петра Ивановича вариантов составить контрольную, используя только задачник?
13. Сколько существует натуральных чисел, у которых сумма цифр равна 6, а в записи нет цифры «0»?
14. На рисунке 7 отрезков, выходящих из одной точки, пересекаются другими 10 отрезками. Сколько на этом рисунке треугольников?



Блок 10. Комбинаторика

Задания Интернет-карусели. Ответы, указания, решения

Считается, что школьники для подсчёта число вариантов понимают правила сложения, умножения, а также в курсе ситуаций, когда среди посчитанных вариантах каждый учитывается дважды.

В первую очередь рекомендуем разобраться с решениями несложных задач: № 1, 2, 5, 9, 10, 11, 14. Их вполне достаточно для одного занятия кружка.

Задания № 6 и № 7 сложные, но полезно подробно разобрать решения с сильными учениками.

1. Володя составил свой словарь: выписал все слова из 6 букв, где на 1, 3 и 5 местах стоят в некотором порядке согласные буквы В, Л и Д, а на 2, 4 и 6 местах в некотором порядке гласные буквы О, О, Я. Сколько слов в словаре Володи?

Ответ: 18.

Указание: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$.

Решение. Буквы В, Л, Д можно поставить на свои места $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами: на первое место любую из 3 букв, на третье место — любую из 2 оставшихся, на последнее остается единственная оставшаяся согласная буква. Буквы О, О, Я можно расставить 3 способами, так как случаи различаются только местом, которое заняла буква Я. Итого $6 \cdot 3 = 18$ способов

2. Вася выписал все числа, получаемые из числа 122225 перестановкой цифр, которые больше полумиллиона. Сколько чисел выписал Вася?

Ответ: 5.

Решение. Число будет более полумиллиона, если оно начинается с цифры 5. На остальные 5 позиций надо поставить одну цифру 1 и четыре цифры 2. Получаем 5 чисел: 512 222, 521 222, 522 122, 522 212 и 522 221.

3. Пятеро девочек Софья, Александра, Арина, Кира и Дарья выстроились в шеренгу одиночных пикетов «за все хорошее против всего плохого». Кира стоит не рядом с Дарьей. Сколько есть вариантов расположения девочек в этой шеренге?

Ответ: 72.

Решение. Все 5 девочек могут встать в шеренгу $5! = 120$ способами. Подсчитаем варианты, которые не подходят, то есть те варианты, где Кира и Дарья стоят рядом. Количество способов расставить всех девочек, кроме Киры, равно $4! = 24$.

Когда все стоят, Киру можно вставить слева или справа от Даши (2 варианта). Значит, не подходят $2 \cdot 4! = 48$ вариантов. Итого: $5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72$.

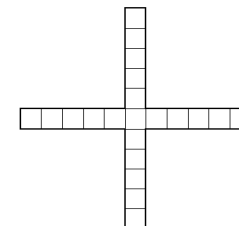
4. Переплетчик должен переплести 11 разных книг. Каждую из них можно переплести либо в красный переплет, либо в синий, при этом каждый цвет должен быть использован хотя бы один раз. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 2046.

Указание: $2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$.

Решение. Первую книгу можно переплести 2 способами, вторую — тоже 2 способами, и так далее. Итого $2^{11} = 2048$ вариантов. Из них не подойдут варианты, где использован только один из двух цветов. Итого: $2048 - 2 = 2046$.

5. Есть «доска» из 21 клетки в виде креста, изображенного на рисунке. Сколькими способами можно поставить две ладьи (белую и чёрную) (а) в соседние по стороне клетки; (б) *бьющие* друг друга; (в) *не бьющие* друг друга?



(а) Ответ: 40.

Решение. Эти две клетки могут стоять вертикально или горизонтально. И тех, и других вариантов по 20, поэтому всего — 40.

(б) Ответ: 220.

Решение. Выберем горизонталь или вертикаль (2 способа), поставим белую ладью (11 способов), а затем на свободную клетку той же линии — чёрную ладью (10 вариантов). Всего $2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$.

(в) Ответ: 200.

Решение. В центральную клетку ставить нельзя. Выберем горизонталь или вертикаль (2 способа), поставим белую ладью (10 способов), а затем на клетку другой линии — чёрную ладью (10 вариантов). Всего $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$.

6. Сколькими способами можно расставить на шахматную доску 8×8 несколько (более одного) одинаковых коней так, чтобы каждый конь бил ровно четырёх других?

Ответ: 4.

Указание. Коней можно расставить только одним способом (или симметричными этому способу).

Краткое решение. Рассмотрим картинку, показанную справа.

1	1	2			2	1	1
1			к				1
2	к				к		2
		к	к	к			
к	к		к		к		
2	к	к	к				2
1	к				к		1
1	1	2	к		2	1	1

В клетку с цифрой 1 нельзя ставить коня, иначе он будет бить менее 4 полей. В клетку с цифрой 2 также нельзя ставить коня, иначе он будет бить менее 4 полей, не отмеченных цифрой 1.

Если на восьми оставшихся крайних клетках доски нет коней, то для оставшейся части можно провести аналогичные рассуждения. Они приводят к тому, что коней поставить нельзя.

Значит, на какой-то крайней клетке стоит конь. Поставив коней, которые должны стоять в побитых клетках, однозначно получаем расстановку, показанную на рисунке.

7. Оленька решила купить мороженое пломбир. В магазине есть 10 видов пломбира. Она хочет так выбрать 6 штук, чтобы среди них нашлось два одинаковых (чтобы было не жалко поделится с сестрой Шурочкой). Сколькими способами Оленька может сделать такую покупку?

Ответ: 4795.

Решение. Рассмотрим случаи, сколько видов мороженого могла купить Оля: одного, двух (1 шт. и 5 шт., 2 шт. и 4 шт. или по 3 шт. каждого), трех видов (4-1-1, 3-2-1 или 2-2-2), четырех видов (3-1-1-1 или 2-2-1-1) или пяти видов (2-1-1-1-1). Посчитаем способы для каждого из указанных вариантов.

(1) Если все одного вида, то очевидно, будет 10 способов.

(2) Мороженое двух видов. Если количество разное, то первый вид можно выбрать 10 способами, второй — 9 способами, всего по $9 \cdot 10 = 90$ вариантов. Если равное, то среди 90 вариантов мы каждый посчитали дважды, поэтому будет 45 вариантов. Всего для трёх распределений (1-5, 2-4 и 3-3) будет $90 + 90 + 45 = 225$ вариантов.

(3) Мороженое трех видов. Рассуждая аналогично, в случае 1-2-3 будет $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов, в случае 4-1-1 будет $10 \cdot 9 \cdot 8 : 2 = 360$ вариантов. В случае 2-2-2 при подсчёте $10 \cdot 9 \cdot 8$ каждый вариант будет учтён $3! = 6$ раз, то есть будет $10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 = 120$ вариантов. Итого $720 + 360 + 120 = 1200$ вариантов.

(4) Мороженое четырёх видов. Вариант 3-1-1-1 (аналогично случаю 2-2-2) даёт $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 = 840$ вариантов. В случае 2-2-1-1 каждый вариант будет учтён $2 \cdot 2 = 4$ раза, то есть будет $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 4 = 1260$ вариантов. Итого $840 + 1260 = 2100$ вариантов.

(4) Мороженое пяти видов. В случае 2-1-1-1-1 при подсчёте $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ каждый вариант будет учтён $4! = 24$ раза. Всего будет $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 : 24 = 1260$ вариантов.

Итого $10 + 225 + 1200 + 2100 + 1260 = 4795$ вариантов.

8. Есть стандартная колода из 36 карт. Сколькими способами можно выбрать из неё
(а) три карты так, чтобы среди них был ровно два туза;
(б) три карты так, чтобы среди них был ровно один туз?
(в) три карты *разной масти* так, чтобы среди них был ровно один туз?

(а) Ответ: 192.

Решение. Два туза из четырёх можно выбрать $4 \cdot 3 : 2 = 6$ способами. Третья карта — любая из оставшихся 32 штук. Итого $6 \cdot 32 = 192$ способа.

(б) Ответ: 1984.

Решение. Выбрать одного туза можно 4 способами. Выбрать 2 карты из 32 штук, среди которых нет тузов, можно $32 \cdot 31 : 2$ способами. Итого $4 \cdot 32 \cdot 31 : 2 = 1984$ способа.

(в) Ответ: 768.

Решение. Выбираем одного туза 4 способами, вторую карту 24 способами (среди 24 карт других мастей, среди которых нет тузов), третью карту — 16 способами (среди 16 карт оставшихся двух мастей, среди которых нет тузов). Каждый вариант учтён дважды (могли выбрать те же карты, не являющиеся тузами, но в обратном порядке). Итого $4 \cdot 24 \cdot 16 : 2 = 768$.

9. В алфавите Мурзиков есть буквы М, У, Р, Ъ. Известно, что слова в словаре Мурзиков не начинаются с Ъ и состоят из не более чем 4 символов. Какое наибольшее число слов может быть в словаре Мурзиков?

Ответ: 255.

Решение. Первой буквой может быть любая из трёх (М, У или Р), а последующими — любая из четырёх. Слов из 1 буквы — 3, из 2 букв — $3 \cdot 4 = 12$, из 3 букв — $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, из 4 букв — $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$. Итого $3 + 12 + 48 + 192 = 255$.

10. У Петра Ивановича есть задачник, где по теме «Комбинаторика» есть только 7 задач разной сложности. Ему необходимо из них составить контрольную работу из 5 задач, стоящих в порядке возрастания сложности. Сколькими способами он может ее составить, используя только задачник?

Ответ: 21.

Решение. Достаточно выбрать 2 задачи из семи, которые не нужно брать. Это можно сделать $7 \cdot 6 : 2 = 21$ способами.

11. В задачнике Петра Ивановича есть 10 арифметических примеров разной сложности. Нужно составить контрольную работу из 8 примеров, стоящих в порядке возраста-

ния сложности. Вася умеет считать только 5 из данных 10 примеров. Сколькими способами можно составить контрольную работу, в которой Вася может решить хотя бы одно задание?

Ответ: 45.

Решение. Из любых 8 примеров встретится тот, который умеет решать Вася. Поэтому нужно выбрать 8 примеров из 10 или выбрать 2 примера, которые не нужно включать в работу. Это можно сделать $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способами.

12. В задачнике Петра Ивановича есть задачи по теме «Уравнения». На уровень сложности 1, 2, 3 — по 10 задач, на уровни сложности 4, 5, 6, 7 — по 2 задачи. Нужно составить контрольную из 5 задач в порядке возрастания сложности (задачи одинаковой сложности в контрольной не могут встречаться). Сколько у Петра Ивановича вариантов составить контрольную, используя только задачник?

Ответ: 34080.

Решение. Сначала выберем два уровня, которые не нужно включать в работу.

Если убирают два уровня из первой тройки, то задачи можно выбрать $3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 480$ способами (3 способа выбрать уровень 1 группы, 10 способов выбрать задачу этого уровня и по 2 способа выбрать задачу на 4, 5, 6, 7 уровнях).

Если убирают по одному уровню из каждой группы, то аналогично получаем $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9600$ способов.

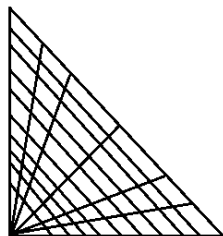
Если не включают два уровня второй группы (их можно выбрать $4 \cdot 3 : 2 = 6$ способами), то аналогично получаем $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24\,000$ способов.

Итого: $480 + 9600 + 24000 = 34080$.

13. Сколько существует натуральных чисел, у которых сумма цифр равна 6, а в записи нет цифры «0»?

Ответ: 32.

Решение. Существует только одно однозначное число с такими свойствами. Подходят только 5 двузначных чисел: 15, 23, 33, 42, 51. Трёхзначное число можно составить из цифр 1, 1, 4 (всего 3 числа), из цифр 1, 2, 3 ($3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ чисел), из цифр 2, 2, 2 (одно число). Итого 10 трёхзначных чисел. Четырёхзначное число можно составить из цифр 1, 1, 1, 3 (4 числа), из цифр 1, 1, 2, 2 (6 чисел). Пятизначное число — только из цифр 1, 1, 1, 1 и 2 (5 чисел). Шестизначное только одно (111111). Итого $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.



14. На рисунке 7 отрезков, выходящих из одной точки, пересекаются другими 10 отрезками. Сколько на этом рисунке треугольников?

Ответ: 210.

Решение. Нужно выбрать два из семи отрезков, выходящих из одной точки, и один из 10 отрезков, пересекающих их. Это можно сделать $7 \cdot 6 : 2 \cdot 10 = 210$ способами.