

Блок 16. Магический квадрат

Подготовительное занятие

Классический магический квадрат $N \times N$ — это таблица $N \times N$, в клетки которой вписаны натуральные числа $1, 2, \dots, N \times N$. При этом суммы чисел во всех строках, столбцах и двух диагоналях должны быть равны.

- Составьте магический квадрат 3×3 из чисел $1, 2, \dots, 9$.

- Заполните пустые клетки в каждом из случаев, чтобы получился магический квадрат, составленный из чисел от 1 до 9.

	1	
2		

	9	
		3

		4
	7	

- Вася хочет составить магический квадрат 3×3 из чисел $4, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 30, 36$. Какими должны быть суммы во всех линиях (строках, столбцах и двух диагоналях)?

- Удастся ли Васе составить магический квадрат 3×3 из чисел
 - $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$;
 - $2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16$?

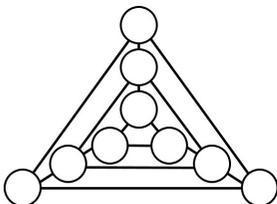
- Придумайте квадрат 3×3 , состоящий из цифр от 1 до 9, в котором суммы чисел по горизонталям, вертикалям и диагоналям различны.

- Придумайте магический квадрат 3×3 из чисел:
 - $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$;
 - $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63$;
 - $12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76$.

- Вася составил магический квадрат 4×4 из чисел от 1 до 16, а затем стер числа в некоторых клетках. Получил такой квадрат.
 - Определите, какой была сумма чисел во всех линиях?
 - Восстановите его квадрат.

16	3		13
		11	
		7	12
4			1

- Расставьте в кружочки числа от 1 до 9 так, чтобы в каждом треугольнике и линии сумма была одинаковой.



Блок 16. Магический квадрат

Подготовительное занятие

Классический магический квадрат $N \times N$ — это таблица $N \times N$, в клетки которой вписаны натуральные числа $1, 2, \dots, N \times N$. При этом суммы чисел во всех строках, столбцах и двух диагоналях должны быть равны.

- Составьте магический квадрат 3×3 из чисел $1, 2, \dots, 9$.

- Заполните пустые клетки в каждом из случаев, чтобы получился магический квадрат, составленный из чисел от 1 до 9.

	1	
2		

	9	
		3

		4
	7	

- Вася хочет составить магический квадрат 3×3 из чисел $4, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 30, 36$. Какими должны быть суммы во всех линиях (строках, столбцах и двух диагоналях)?

- Удастся ли Васе составить магический квадрат 3×3 из чисел
 - $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$;
 - $2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16$?

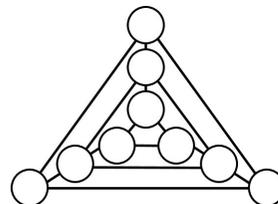
- Придумайте квадрат 3×3 , состоящий из цифр от 1 до 9, в котором суммы чисел по горизонталям, вертикалям и диагоналям различны.

- Придумайте магический квадрат 3×3 из чисел:
 - $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$;
 - $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63$;
 - $12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76$.

- Вася составил магический квадрат 4×4 из чисел от 1 до 16, а затем стер числа в некоторых клетках. Получил такой квадрат.
 - Определите, какой была сумма чисел во всех линиях?
 - Восстановите его квадрат.

16	3		13
		11	
		7	12
4			1

- Расставьте в кружочки числа от 1 до 9 так, чтобы в каждом треугольнике и линии сумма была одинаковой.



Блок 16. Магический квадрат

Подготовительное занятие

Для проведения занятия предлагаются задачи про магический квадрат и похожие проблемы. Классический магический квадрат $N \times N$ — это таблица $N \times N$, в клетки которой вписаны натуральные числа $1, 2, \dots, N \times N$. При этом суммы чисел во всех строках, столбцах и двух диагоналях должны быть равны.

В качестве предварительного разбора предлагается составить магический квадрат 3×3 , последовательно ответив на вопросы-подсказки.

- Составьте магический квадрат 3×3 из чисел $1, 2, \dots, 9$.
 - (а) Какова сумма чисел в каждой линии?
 - (б) Сколькими способами можно набрать эту сумму, если одно из чисел равно 1? В какой клетке должно стоять число 1?
 - (в) В какой клетке может стоять число 9?
 - (г) Где стоят числа 2 и 8?
 - (д) Расставьте остальные числа.

(а) Ответ: 15.

Решение. Сумма всех чисел состоит из трёх равных частей — сумм в трёх строках. Поэтому сумма в каждой строке равна $(1 + 2 + \dots + 9) : 3 = 15$.

(б) Ответ: 2 способами.

Решение. Чтобы получить сумму 15, надо к числу 1 надо добавить два различных числа от 2 до 9, дающих в сумме 14. Это можно сделать только двумя способами: $9 + 5$ и $8 + 6$.

Из ответа можно сделать важный вывод: число 1 должно стоять в клетке, которая участвует только в 2 линиях. Это клетки, отмеченные на рисунке слева крестиком. Квадрат можно повернуть так, что число 1 будет стоять в клетке, как показано на рисунке справа.

	x	
x		x
	x	

	1	

(в) Решение. Как число 9 вместе с двумя различными числами от 1 до 8 может дать в сумме 15? Нужно двумя числами набрать сумму $15 - 9 = 6$. Это можно сделать только двумя способами: $2 + 4$ и $1 + 5$. Значит, число 9 тоже стоит в клетке, отмеченной на рисунке крестиком. Кроме этого, в какой-то линии должна

набраться сумма $9 + 1 + 5$, эта линия определяется однозначно, как показано на рисунке.

	1	
	5	
	9	

(г) Решение. Из решений предыдущих пунктов следует, что в верхней строке должна быть сумма $1 + 8 + 6$. С точностью до симметрии можно считать, что числа в верхней строке расположены как на левом рисунке.

6	1	8
	5	
	9	

6	1	8
	5	
2	9	4

В нижней строке должна быть сумма $9 + 2 + 4$. Чтобы суммы в диагоналях были также равны 15, числа должны располагаться как на правом рисунке.

(д) Решение. Не трудно заполнить две оставшиеся пустые клетки числами 3 и 7. Получаем расстановку, показанную на рисунке.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Комментарий. Обратите внимание учеников на то, что мы получили единственную (с точностью до поворота и симметрии) таблицу, причем ее единственность была доказана в ходе рассуждений.

Следующие задачи предлагаются ученикам для самостоятельного решения.

1. Заполните пустые клетки в каждом из случаев, чтобы получился магический квадрат, составленный из чисел от 1 до 9.

	1	
2		

9		
	3	

		4
7		

Ответ: расположения показаны соответственно на рисунке.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Комментарий. Полезно с учениками обсудить, какими поворотами и симметриями из магического квадрата, указанного выше, получается расстановка чисел из этой задачи.

2. Вася хочет составить магический квадрат 3×3 из чисел 4, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 30, 36. Какими должны быть суммы во всех линиях (строках, столбцах и двух диагоналях)?

Ответ: 60.

Решение. Считая так же, как и с классическим квадратом, получаем:
 $(4 + 10 + 14 + 16 + 20 + 24 + 26 + 30 + 36) : 3 = 60$.

3. Удастся ли Васе составить магический квадрат 3×3 из чисел
(а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10;
(б) 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16?

(а) Ответ: не удастся.

Решение. Найдём сумму, которая должна получиться во всех линиях: сумма указанных чисел равна 47, она не делится на 3 без остатка. Значит, квадрат не получится.

(б) Ответ: не удастся.

Замечание. Заметьте, что получить противоречие, как в пункте (а), не получится: сумма чисел равна 81, сумма в линии должна быть равной 27.

Решение (длинное). Сумма в линии должна быть равна 27. Рассмотрим (аналогично разобранный в начале задачи) какое-нибудь число, как с ним набирается сумма 27. Например, для числа 16 надо набрать сумму 11. Она набирается только как $2 + 9$. Но такое невозможно: число 16 находится как минимум в двух линиях.

Комментарий. На самом деле, проблема не только в числе 16, а в чётности данных чисел: из них только одно нечётное, а остальные — чётные. Поэтому можно получить более короткое решение.

Решение (короткое). Все числа, кроме 9, — четные. Значит, две строки будут заполнены только чётными числами и сумма в каждой из них будет чётна. В оставшейся строке будет нечётное число 9 и два чётных числа — сумма в ней будет нечётна, она не может быть равна суммам в других строках. Противоречие.

4. Придумайте квадрат 3×3 , состоящий из цифр от 1 до 9, в котором суммы чисел по горизонталям, вертикалям и диагоналям различны.

Решение. Есть много примеров. Один из них показан на рисунке. Рядом приписаны суммы в линиях.

1	2	3	6	
4	6	8	18	
5	7	9	21	
14	10	15	20	16

5. Придумайте магический квадрат 3×3 из чисел:
(а) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13;
(б) 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63;
(в) 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76.

Комментарий. Конечно, можно постараться построить магический квадрат из указанных чисел тем же методом, что и классический. Но стоит задуматься, например, над пунктом (а): даны также 9 последовательных натуральных чисел...

(а) Решение. Понятно, что если каждое число классического магического квадрата увеличить на одно и то же число, то суммы во всех нужных линиях останутся равными. В данном случае можно все числа увеличить на 4, как показано на рисунке.

6	1	8	→	10	5	12
7	5	3	+4	11	9	7
2	9	4	→	6	13	8

(б) Решение. Набор данных чисел — числа от 1 до 9, умноженные на 7. Аналогично предыдущему пункту понятно, что квадрат останется магическим после умножения всех чисел на одно и то же число. Пример можно получить, умножив все числа классического магического квадрата на 7.

6	1	8	→	42	7	56
7	5	3	×7	49	35	21
2	9	4	→	14	63	28

(в) Решение. Заметьте, что данный набор чисел получается из предыдущих двух сложением чисел на одинаковых местах.

10	5	12	+	42	7	56	=	52	12	68
11	9	7		49	35	21		60	44	28
6	13	8		14	63	28		20	76	36

6. Вася составил магический квадрат 4×4 из чисел от 1 до 16, а затем стер числа в некоторых клетках. Получил такой квадрат.

16	3		13
		11	
		7	12
4			1

- (а) Определите, какой была сумма чисел во всех линиях?
(б) Восстановите его квадрат.

(а) Ответ: 34.

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 16 равна 136, значит, сумма в каждой линии должна быть равной $136 : 4 = 34$.

(б) Решение. Зная сумму в каждой линии не трудно восстанавливать числа.

16	3	2	13
		11	8
	6	7	12
4			1

16	3	2	13
		11	8
	9	6	7
4		14	1

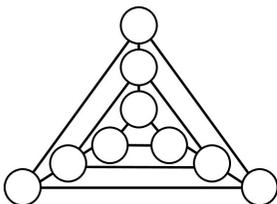
16	3	2	13
	5		11
	9	6	7
4		14	1

16	3	2	13
	5	10	11
	9	6	7
4	15	14	1

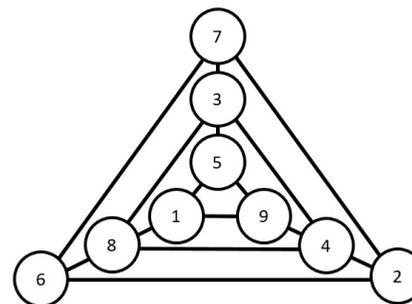
Сначала найти число в первой строке ($34 - 16 - 3 - 13 = 2$) и число в последнем столбце ($34 - 13 - 12 - 1 = 8$). Получится результат, показанных на первом рисунке.

Далее восстанавливается недостающее число в третьей строке и число в третьем столбце (результат на втором рисунке). Потом можно найти число в первом столбце (результат на третьем рисунке), затем заполнить до конца вторую и четвертую строки, получив результат, показанный на четвертом рисунке.

7. Расставьте в кружочки числа от 1 до 9 так, чтобы в каждом треугольнике и линии сумма была одинаковой.



Ответ: один из возможных способов показан на рисунке.



Комментарий. Заметьте, чтобы получить нужную расстановку чисел, можно в линии брать числа из строк магического квадрата, а в вершины треугольников — из столбцов магического квадрата.