

Блок 17. Алгоритмы и процессы

Задания Интернет-карусели (2020)

- У директора Василия есть 10 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 10. Каждый день он использует только одну печать, следующую по порядку: 1, 2, 3, ..., 10, 1, 2 и так далее. Василий работал 123 дня подряд. В первый день использовал печать № 7. Какой номер печати, которую он использует в 123-ий день?
- У директора Василия есть 10 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 10. Каждый день он использует только одну печать, следующую по порядку: 1, 2, 3, ..., 10, 1, 2 и так далее. Василий работал 77 дней подряд. В 77-ой день использовал печать № 3. Какой номер печати, которую он использовал в первый день?
- У директора Василия есть 11 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 11. Каждый день он использует только одну печать, следующую через одну по порядку: 1, 3, 5, ..., 11, 2, 4 и так далее. Василий работал 88 дней подряд. В первый день использовал печать № 7. Какой номер печати, которую он использует в 88-ой день?
- На нижней горизонтали № 1 шахматной доски в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Сколько фишек всего будет в клетках горизонтали № 3?
- На нижней горизонтали № 1 шахматной доски в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Он проделывает то же самое, пока все фишки не окажутся на горизонтали № 5. Сколько фишек в этот момент будет на доске?
- Вася взял доску, в которой 10 горизонталей и 17 столбцов. На нижней горизонтали № 1 в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Он проделывает то же самое, пока все фишки не окажутся на последней горизонтали № 10. Какое самое большее количество фишек лежит в клетке этой горизонтали?

- На дворе 17 цыплят клевали зерно. Первый цыплёнок склевал 37 зёрен; второй — 45, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склеванных всеми предыдущими цыплятами. Сколько всего зёрен склевал 17-ый цыплёнок?
- На дворе 15 цыплят клевали зерно. Первый цыплёнок склевал 27 зёрен; второй — 33, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склеванных всеми предыдущими цыплятами. Сколько всего зёрен склевали цыплята?
- Написаны числа 7, 19, 31. Петя может стереть любое число, сложить два оставшихся, вычесть стёртое, а затем результат написать. Например, если он стирает 7, то на его место он запишет $19 + 31 - 7 = 43$. Петя несколько раз проделал описанную операцию. Какое наименьшее число, более 1000, может оказаться среди написанных?
- Написаны числа 7, 19, 31. Петя может стереть любое число, сложить два оставшихся, вычесть стёртое, а затем результат написать. Например, если он стирает 7, то на его место он запишет $19 + 31 - 7 = 43$. Петя несколько раз проделал описанную операцию. Получилось три числа, меньшее по величине число равно 2023. Какое число большее по величине?
- В длинном коридоре в ряд идут двери с номерами 1, 2, 3, ... 97. Хулиган Вовочка заляпывает их краской: в первый день — каждую вторую (1-ю, 3-ю, 5-ю, ...), во второй день — каждую третью (1-ю, 4-ю, 7-ю, ...), потом каждую четвёртую, и так далее. В один из дней оказалось, что не заляпанной остались только три двери. Каковы их номера?
- Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько квадратиков получится, когда Петя получит 10 рядов?



- Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько спичек должен использовать Петя, чтобы получить 5 рядов?
- Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько спичек должен использовать Петя, чтобы получить 20 рядов?
- По кругу стоит 33 аквариума. В одном из аквариумов плавает тренированный карп. По свистку карп подпрыгивает, перелетает 5 аквариумов и приземляется в 6-ой (по часовой стрелке). Так из 1-го он прыгнет в 7-ой, затем — в 13-ый, и так далее. Через сколько свистков карп впервые снова окажется в изначальном аквариуме?

Блок 17. Алгоритмы и процессы

Задания Интернет-карусели (2020). Указания и решения

- Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.
- Рекомендуем рассмотреть задания группами: задачи № 1-3, задачи № 4-6, задачи № 7-8, задачи № 9-10 и задачи № 12-14.

1. У директора Василия есть 10 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 10. Каждый день он использует только одну печать, следующую по порядку: 1, 2, 3, ..., 10, 1, 2 и так далее. Василий работал 123 дня подряд. В первый день использовал печать № 7. Какой номер печати, которую он использует в 123-ий день?

Ответ: 9.

Решение. Если в 1-ый день он использовал печать № 7, то на 11-ый день он пройдет полный цикл и будет снова использовать печать № 7. Ту же печать он будет использовать на 21-ый, 31-ый, ..., 121-ый день. Тогда на 122-ой день будет использована печать № 8, а на 123-ий день — печать № 9.

2. У директора Василия есть 10 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 10. Каждый день он использует только одну печать, следующую по порядку: 1, 2, 3, ..., 10, 1, 2 и так далее. Василий работал 77 дней подряд. В 77-ой день использовал печать № 3. Какой номер печати, которую он использовал в первый день?

Ответ: 7.

Решение. Если на 77 день он использовал печать № 3, то её же он брал на 67-ой, 57-ой, 47-ой, 37-ой, 27-ой, 17-ый и 7-ой день. Тогда на 6-ой день он использовал печать № 2, на 5-ый — № 1, на 4-ый — № 10, на 3-ий — № 9, на 2-ой — № 8, на 1-ый — № 7.

3. У директора Василия есть 11 печатей, они лежат по кругу и пронумерованы по порядку от 1 до 11. Каждый день он использует только одну печать, следующую через одну по порядку: 1, 3, 5, ..., 11, 2, 4 и так далее. Василий работал 88 дней подряд. В первый день использовал печать № 7. Какой номер печати, которую он использует в 88-ой день?

Ответ: 5

Решение. Если в первый день — печать № 7, то на 11-ый день он пройдет по всем 11 печатям и будет использовать печать с № 5 (которая перед № 7). Так же во все дни, которые делятся на 11, в частности на 88-ой день.

4. На нижней горизонтали № 1 шахматной доски в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Сколько всего фишек будет в клетках горизонтали № 3?

Ответ: 62.

Решение. В таблице в первой строке показано, сколько фишек будет в горизонтали № 1, во второй — в горизонтали № 2, в третьей — в горизонтали № 3.

1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	2
5	8	9	9	9	9	8	5

Сумма чисел в третьей строке равна 62.

5. На нижней горизонтали № 1 шахматной доски в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Он проделывает то же самое, пока все фишки не окажутся на горизонтали № 5. Сколько фишек в этот момент будет на доске?

Ответ: 502.

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи имеем таблицу:

1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	2
5	8	9	9	9	9	8	5
13	22	26	27	27	26	22	13
35	61	75	80	80	75	61	35

Сумма чисел в третьей строке равна 62.

Замечание. Заметим, таблица симметрична. Поэтому можно искать числа только в одной половине. Для этого достаточно заполнить следующие клетки:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	3	2
5	8	9	9	9	9	8		
13	22	26	27	27	26			
35	61	75	80	80				

6. Вася взял доску, в которой 10 горизонталей и 17 столбцов. На нижней горизонтали № 1 в каждой клетке лежит фишка. Вася каждую фишку с горизонтали снимает и кладет в клетки горизонтали № 2, которые имеют с данной общую сторону или вершину, по одной фишке. Так в каждой клетке горизонтали № 2 оказывается 2 или 3 штуки. Далее он так же снимает фишки на горизонтали № 2 и по тому же правилу кладет фишки в горизонталь № 3. Он проделывает то же самое, пока все фишки не окажутся на последней горизонтали № 10. Какое самое большее количество фишек лежит в клетке этой горизонтали?

Ответ: 19681.

Решение. Искомое количество будет в центральной клетке горизонтали.

Заполняя таблицу, аналогично решениям предыдущих задач, можно заметить, что числа в центральном треугольнике (см. рисунок) — степени тройки, а рядом с ними числа на 1 меньше. Поэтому, несложно заполнить клетки, показанные на рисунке, и найти нужное число.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	
		26	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	26			
			80	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	80			
				242	243	243	243	243	243	243	243	243	242				
					728	729	729	729	729	729	729	728					
						2186	2187	2187	2187	2186							
							6560	6561	6560								
								19681									

7. На дворе 17 цыплят клевали зерно. Первый цыплёнок склевал 37 зёрен; второй — 45, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склеванных всеми предыдущими цыплятами. Сколько всего зёрен склевал 17-ый цыплёнок?

Ответ: 41

Указание. Заметьте, что если к набору чисел добавить их среднее арифметическое, то среднее арифметическое всего набора не изменится.

Решение. Третий цыплёнок склевал $(37 + 45) : 2 = 41$ зерно.

Пусть уже клевали n цыплят, из которых первые два склевали 37 и 45 штук, а каждый из $(n - 2)$ остальных — по 41 штуке. Тогда следующий цыпленок склевал $(37 + 45 + 41(n - 2)) : n = 41n : n = 41$ зерно. Поэтому 17-ый цыпленок склюет 41 зерно.

8. На дворе 15 цыплят клевали зерно. Первый цыплёнок склевал 27 зёрен; второй — 33, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склеванных всеми предыдущими цыплятами. Сколько всего зёрен склевали цыплята?

Ответ: 450

Указание. Заметьте, что если к набору чисел добавить их среднее арифметическое, то среднее арифметическое всего набора не изменится.

Решение. Третий цыплёнок склевал $(27 + 33) : 2 = 30$ зерно.

Пусть уже клевали n цыплят, из которых первые два склевали 27 и 33 штуки, а каждый из $(n - 2)$ остальных — по 30 штук. Тогда следующий цыпленок склевал $(27 + 33 + 30(n - 2)) : n = 30n : n = 30$ зерен. Поэтому среднее арифметическое зерен, склёванных цыплятами, равно 30. Всего склевали $30 \cdot 15 = 450$ зерен.

9. Написаны числа 7, 19, 31. Петя может стереть любое число, сложить два оставшихся, вычесть стёртое, а затем результат написать. Например, если он стирает 7, то на его место он запишет $19 + 31 - 7 = 43$. Петя несколько раз проделал описанную операцию. Какое наименьшее число, более 1000, может оказаться среди написанных?

Ответ: 1003.

Решение. Исходная тройка чисел обладает таким свойством: если их записать в порядке возрастания, то разность соседних чисел равна 12. То есть, для некоторого числа n наша тройка будет иметь вид $(n - 12; n; n + 12)$.

Это свойство сохраняется: любая тройка, полученная из данной, будет обладать таким свойством. Либо число n заменяют на $(n - 12) + (n + 12) - n = n$, либо число $n - 12$ заменяют на $n + (n + 12) - (n - 12) = n + 24$, либо число $n + 12$ заменяют на $n + (n - 12) - (n + 12) = n - 24$. Получается либо та же тройка, либо $(n; n + 12; n + 24)$, либо $(n - 24; n - 12; n)$.

Вывод: следующее по величине число, которое можно получить, на 12 больше большего из имеющихся. После 31 можно получить $31 + 12 = 43$, $43 + 12 = 55$ и так далее. Все такие числа дают остаток 7 при делении на 12. Наименьшее такое число, которое больше 1000, — это 1003.

10. Написаны числа 7, 19, 31. Петя может стереть любое число, сложить два оставшихся, вычесть стёртое, а затем результат написать. Например, если он стирает 7, то на его

место он запишет $19 + 31 - 7 = 43$. Петя несколько раз проделал описанную операцию. Получилось три числа, меньшее по величине число равно 2023. Какое число большее по величине?

Ответ: 2047.

Решение. Из решения предыдущей задачи следует, что каждая тройка — это такие три различных числа, что соседние (по величине) числа отличаются на 12. Если в какой-то момент наименьшее число тройки — это 2023, то следующие два числа — $2023 + 12 = 2035$ и $2035 + 12 = 2047$.

11. В длинном коридоре в ряд идут двери с номерами 1, 2, 3, ... 97. Хулиган Вовочка заляпывает их краской: в первый день — каждую вторую (1-ю, 3-ю, 5-ю, ...), во второй день — каждую третью (1-ю, 4-ю, 7-ю, ...), потом каждую четвёртую, и так далее. В один из дней оказалось, что не заляпанной остались только три двери. Каковы их номера?

Ответ: 2, 84, 90.

Указание. Наибольшие простые числа, меньшие 97, равны 89 и 83.

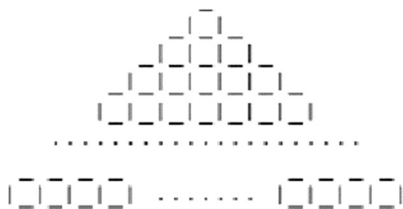
Решение. Уменьшим номер каждой двери на 1. Теперь их номера 0, 1, 2, 3, ..., 96. Заляпав каждую 2-ую, хулиган заляпает двери с чётными номерами, каждую третью — с номерами, делящимися на 3, и так далее.

Заметим, что дверь с номером 1 никогда не будет заляпана.

Рассмотрим номер n , который не делится (без остатка) на число, меньшее его и не равное 1. (Такие числа называют простыми). Дверь с таким номером будет заляпана только в случае, когда Вовочка будет закрашивать каждую n -ую дверь. Вывод: надо найти два наибольших таких числа. Это 83 и 89.

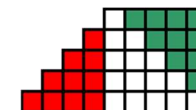
Если вернуться к нумерации дверей, данной в условии, то искомые номера равны $1 + 1 = 2$, $83 + 1 = 84$, $89 + 1 = 90$.

12. Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько квадратиков получится, когда Петя получит 10 рядов?



Ответ: 100.

Решение. Заметим, что число клеток в такой фигуре всегда равно квадрату числа рядов. Это легче всего заметить геометрически (см. рисунок).



Для этого часть фигуры, закрашенную красным, отрезем и приложим к фигуре с другой стороны (часть, закрашенная зелёным). В результате получится квадрат, число клеток в стороне которого равно количеству рядов в исходной фигуре. Площадь этого квадрата, с одной стороны, равна площади исходной фигуры, а с другой стороны, равна квадрату количества рядов в исходной фигуре.

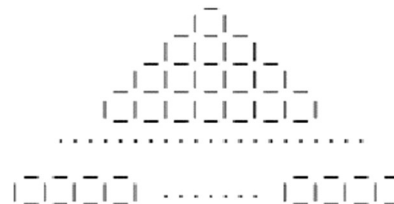
13. Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько спичек должен использовать Петя, чтобы получить 5 рядов?



Ответ: 64

Указание. Можно честно нарисовать 5 рядов и посчитать количество спичек. Способ, как находить количество спичек при любом числе рядов, показан в следующей задаче.

14. Петя с помощью спичек составляет треугольник из квадратиков, как показано на рисунке. Сколько спичек должен использовать Петя, чтобы получить 20 рядов?



Ответ: 859.

Решение. Из результата задачи № 12 следует, что в 20 рядах 400 квадратиков.

Для каждого квадрата отметим 2 спички: верхнюю и левую. Всего $400 \cdot 2 = 800$ штук. Остались не отмеченными нижние спички последнего ряда (их 39 штук) и правые спички каждого ряда (их 20 штук). Значит, всего $800 + 39 + 20 = 859$ спичек.

15. По кругу стоит 33 аквариума. В одном из аквариумов плавает тренированный карп. По свистку карп подпрыгивает, перелетает 5 аквариумов и приземляется в 6-ой (по часовой стрелке). Так из 1-го он прыгнет в 7-ой, затем — в 13-ый, и так далее. Через сколько свистков карп впервые снова окажется в изначальном аквариуме?

Ответ: 11.

Решение 1. Выпишем последовательность номеров, в которые попадает карп: $1 \rightarrow 13 \rightarrow 19 \rightarrow 25 \rightarrow 31 \rightarrow \dots$. Далее должен идти номер $31 + 6 = 37$. Но 34-ый аквариум на самом деле имеет номер 1, 35-ый — номер 2, 36-ой — номер 3, 37-ой — номер 4 (номер уменьшается на 33).

Далее имеем: $\dots \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 16 \rightarrow 22 \rightarrow 28 \rightarrow \dots$. Далее должен идти номер $28 + 6 = 34$, то есть, карп вернётся в 1-ый аквариум.

Итого: $1 \rightarrow 13 \rightarrow 19 \rightarrow 25 \rightarrow 31 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 16 \rightarrow 22 \rightarrow 28 \rightarrow 1$. Всего 11 прыжков.