Блок 8. Алгебра

Задания Интернет-карусели (2020)

1. Найдите коэффициент при x^{15} в произведении многочленов $(11x^{10} + 10x^9 + \dots + 2x + 1)(x^{10} + x^9 + \dots + x + 1)$.

2. Числа a, b, c, d таковы, что $a + 2b + 3c + 4d = 12$, $4a + 3b + 2c + d = 13$. Чему может быть равно значение выражения $a + b + c + d$?

3. Числа a, b, c, d таковы, что $a + 3b + 5c + 7d = 13$, $4a + 3b + 2c + d = 7$. Чему может быть равно значение выражения $a + b + c + d$?

4. Числа a, b таковы, что $a - 2b = 7, a \cdot b = 39$. Найти $a^2 + 4b^2$.

5. Сколько пар целых чисел $(a; b)$ удовлетворяют соотношению $2ab - a + 6b = 1003$?

6. Найдите наибольшее чётное целое число n, для которого $2^{2020} + 2^n + 1$ будет квадратом какого-то натурального числа.

7. Петя на каждой стороне квадрата написал число. Суммы чисел, написанных на противоположных сторонах, равны 17. Вася для каждой вершины вычислили произведение чисел на сторонах, выходящих из этой вершины. Чему равна сумма чисел, полученных Васей?

8. Вася на каждой грани куба написал натуральное число. Петя для каждой вершины нашёл произведение чисел на трёх гранях с этой вершиной. Сумма чисел, найденных Петей, равна 70. Чему равна сумма чисел, написанных Васей?

9. Петя на каждой стороне квадрата написал число. Сумма всех четырёх чисел равна нулю, а сумма двух чисел на противоположных сторонах на 5 больше суммы чисел на двух других сторонах. Вася для каждой вершины вычислили произведение чисел на сторонах, выходящих из этой вершины. Чему равна сумма чисел, полученных Васей?

10. Вовочка загадал 2 числа и сообщил, что разность их квадратов равна 50. Потом каждое из чисел он уменьшил на единицу и сообщил, что разность квадратов новых чисел равна 30. После этого он снова уменьшил оба числа на 1. Какой теперь будет разность их квадратов?

11. Расположите числа в порядке возрастания:

(1) $\underbrace{111\dots11}_{2019}0 \times \underbrace{111\dots11}_{2019}2 - \underbrace{111\dots11}_{2019}2 \times \left(\underbrace{111\dots11}_{2020}{}^3 - \underbrace{111\dots11}_{2020}{}^2 + \underbrace{111\dots11}_{2020} + 1\right)$,

(2) $\underbrace{111\dots11}_{2019}3 \times \underbrace{111\dots11}_{2019}5 - \underbrace{111\dots11}_{2018}09 \times \underbrace{111\dots11}_{2019}3 + 6 \times \underbrace{111\dots11}_{2020}$,

(3) -111,

(4) $\dfrac{5 \times 2222222222 \times 5555555555}{4444444444^2 - 1111111111^2}$.

12. Укажите все такие целые числа n, при которых $n^3 - 1$ является простым числом.

13. Укажите все такие целые числа n, при которых модуль числа $n^3 - 1000$ является простым числом.

14. Какова сумма цифр числа, являющегося произведением чисел 699…997 (111 девяток) и 700…003 (111 нулей)?

15. Вычислите значение выражения:

$$\frac{21 \cdot 8^3 \cdot 3^7 - 2^{10} \cdot 81^2}{6^8 \cdot 5}.$$

Блок 8. Алгебра

Задания Интернет-карусели (2020). Указания, ответы и решения

1. Найдите коэффициент при x^{15} в произведении многочленов

   $(11x^{10}+10x^9+\dots+2x+1)(x^{10}+x^9+\dots+x+1)$.

   Ответ: 51

   Указание: 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51.

   Решение. При раскрытии скобок каждый одночлен из первой скобки умножается на каждый одночлен из второй скобки. При этом умножении x^{15} может быть получен как произведение $11x^{10}\cdot x^5$, $10x^9\cdot x^6, \dots, 6x^5\cdot x^{10}$, поэтому суммарный коэффициент будет равен 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 51.

2. Числа a, b, c, d таковы, что $a+2b+3c+4d=12$, $4a+3b+2c+d=13$. Чему может быть равно значение выражения $a+b+c+d$?

   Ответ: 5.

   Решение. Сложим эти два равенства:
   $(a+2b+3c+4d)+(4a+3b+2c+d)=5(a+b+c+d)=12+13=25$.
   Отсюда $a+b+c+d=25:5=5$.

3. Числа a, b, c, d таковы, что $a+3b+5c+7d=13$, $4a+3b+2c+d=7$. Чему может быть равно значение выражения $a+b+c+d$?

   Ответ: 3.

   Решение. Умножим второе равенство на 2 и сложим с первым:
   $2(4a+3b+2c+d)+(a+3b+5c+7d)=9(a+b+c+d)=2\cdot 7+13=27$.
   Отсюда $a+b+c+d=27:9=3$.

4. Числа a, b таковы, что $a-2b=7, a\cdot b=39$. Найти a^2+4b^2.

   Ответ: 205.

   Указание: заметьте, что $(a-2b)^2$ содержит a^2+4b^2.

   Решение. Ответ следует из следующих преобразований:
   $a^2+4b^2=(a-2b)^2+4ab=7^2+4\cdot 39=205$.

   Комментарий. Можно доказать, что данным условия удовлетворяет только пара чисел $a=13, b=3$.

5. Сколько пар целых чисел $(a;b)$ удовлетворяют соотношению $2ab-a+6b=1003$?

   Ответ: 8

   Указание: $(2ab-a+6b)-3=(a+3)(2b-1)=1000$.

   Решение. Из условия следует, что $(2ab-a+6b)-3=(a+3)(2b-1)=1000$. Произведение целых чисел $a+3$ и $2b-1$ равно 1000. Заметим, число $2b-1$ нечётно, при любом подходящем значении b найдётся значение a. Поэтому подходящих пар столько, сколько нечетных делителей у числа 1000, а их всего 8 штук: $\pm1, \pm5, \pm25, \pm125$.

6. Найдите наибольшее чётное целое число n, для которого $2^{2020}+2^n+1$ будет квадратом какого-то натурального числа.

   Ответ: 4038

   Решение. Во-первых, число $2^{4038}+2^{2020}+1=(2^{2019}+1)^2$ — квадрат натурального числа, поэтому подходит значение $n=4038$.

   Для всех значений n, больших 4038, число $2^n+2^{2020}+1$ не является квадратом. Пусть чётное число n равно $2k$ (k — натуральное число, $k>4038/2=2019$). Тогда данная сумма не может быть квадратом целого числа, так как расположена между двух квадратов последовательных целых чисел:

   $$(2^k)^2<2^{2k}+2^{2020}+1<(2^k+1)^2.$$

   Действительно, левое неравенство очевидно, а правое после преобразование имеет вид $2^{2020}+1<2\cdot 2^k+1$, что выполнено при $k>2019$.

7. Петя на каждой стороне квадрата написал число. Суммы чисел, написанных на противоположных сторонах, равны 17. Вася для каждой вершины вычислили произведение чисел на сторонах, выходящих из этой вершины. Чему равна сумма чисел, полученных Васей?

   Ответ: 289

   Решение. Пусть на сторонах квадрата были написаны числа a, b, c, d, из условия $a+c=b+d=17$. Указанная сумма равна
   $ab+bc+cd+da=a(b+d)+c(b+d)=(a+c)(b+d)=17\cdot 17=289$.

8. Вася на каждой грани куба написал натуральное число. Петя для каждой вершины нашёл произведение чисел на трёх гранях с этой вершиной. Сумма чисел, найденных Петей, равна 70. Чему равна сумма чисел, написанных Васей?

   Ответ: 14

   Решение. Пусть на двух противоположных гранях написаны числа n_1, n_2, на двух других противоположных гранях — числа n_3, n_4, на оставшихся двух противоположных гранях — числа n_5, n_6. Тогда в вершинах куба записаны произведения $n_1n_3n_5, n_1n_3n_6, n_1n_4n_5, n_1n_4n_6, n_2n_3n_5, n_2n_3n_6, n_2n_4n_5, n_2n_4n_6$. Преобразуем их сумму (сгруппируем сначала первые четыре произведения и четыре последних):

$(n_1n_3n_5 + n_1n_3n_6 + n_1n_4n_5 + n_1n_4n_6) + (n_2n_3n_5 + n_2n_3n_6 + n_2n_4n_5 + n_2n_4n_6) =$

$= n_1(n_3n_5 + n_3n_6 + n_4n_5 + n_4n_6) + n_2(n_3n_5 + n_3n_6 + n_4n_5 + n_4n_6) =$

$= (n_1 + n_2)(n_3n_5 + n_3n_6 + n_4n_5 + n_4n_6) = (n_1 + n_2)(n_3 + n_4)(n_5 + n_6).$

Тогда $(n_1 + n_2)(n_3 + n_4)(n_5 + n_6) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Числа $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ — натуральные, сумма любых двух из них более 1. Поэтому множители (в каком-то порядке) равны 2, 5, 7. Тогда искомая сумма равна

$(n_1 + n_2) + (n_3 + n_4) + (n_5 + n_6) = 2 + 5 + 7 = 14.$

9. Петя на каждой стороне квадрата написал число. Сумма всех четырёх чисел равна нулю, а сумма двух чисел на противоположных сторонах на 5 больше суммы чисел на двух других сторонах. Вася для каждой вершины вычислили произведение чисел на сторонах, выходящих из этой вершины. Чему равна сумма чисел, полученных Васей?

Ответ: −6,25

Решение. Пусть на сторонах квадрата были написаны числа a, b, c, d, из условия $a + b + c + d = 0, (a + c) - (b + d) = 5$. Отсюда $a + c = 2{,}5$, $b + d = -2{,}5$. Нужно найти $ab + bc + cd + da$.

Получаем $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 2{,}5 \cdot (-2{,}5) = -6{,}25$.

10. Вовочка загадал 2 числа и сообщил, что разность их квадратов равна 50. Потом каждое из чисел он уменьшил на единицу и сообщил, что разность квадратов новых чисел равна 30. После этого он снова уменьшил оба числа на 1. Какой теперь будет разность их квадратов?

Ответ: 10.

Указание. После 3 уменьшения будут числа –5,5 и –4,5.

Решение. Так как $(a-1)^2 - (b-1)^2 = (a-b)(a+b-2) = a^2 - b^2 - 2(a-b)$, то $a - b = (50 - 30) : 2 = 10$. Так как $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, то (с учётом предыдущего) $a + b = 50 : 10 = 5$.

Если $a - b = 10, a + b = 5$, то $a = 7{,}5$, $b = -2{,}5$. Нужно найти $5{,}5^2 - (-4{,}5)^2 = (5{,}5 + 4{,}5)(5{,}5 - 4{,}5) = 10 \cdot 1 = 10$.

11. Расположите числа в порядке возрастания:

(1) $\underbrace{111\ldots11}_{2019}0 \times \underbrace{111\ldots11}_{2019}2 - \underbrace{111\ldots11}_{2019}2 \times \left(\underbrace{111\ldots11}_{2020}{}^3 - \underbrace{111\ldots11}_{2020}{}^2 + \underbrace{111\ldots11}_{2020} + 1\right)$,

(2) $\underbrace{111\ldots11}_{2019}3 \times \underbrace{111\ldots11}_{2019}5 - \underbrace{111\ldots11}_{2018}09 \times \underbrace{111\ldots11}_{2019}3 + 6 \times \underbrace{111\ldots11}_{2020}$,

(3) −111,

(4) $\dfrac{5 \times 2222222222 \times 5555555555}{4444444444^2 - 1111111111^2}$.

Ответ: 1, 3, 4, 2.

Решение. Пусть $n = \underbrace{111\ldots11}_{2020}$. Преобразуем указанные выражения.

(1) Имеем $(n-1)(n+1) - (n+1)(n^3 - n^2 + n + 1) = n^2 - 1 - n^4 - 2n - 1$, что можно привести к виду $-n^2(n^2 - 1) - 2n - 2$, из которого видно, что значение выражения при указанном n меньше, чем −111.

(2) Имеем $(n+2)(n+4) - (n-2)(n+2) + 6n$, что после раскрытия скобок и приведения подобных преобразуется к виду $12n + 12$. При указанном n значение выражения большое положительное число (больше, чем полученное в пункте (4)).

(4) Имеем выражение

$\dfrac{5 \cdot 2n \cdot 5n}{(4n)^2 - n^2} = \dfrac{50}{4-1} = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}.$

Из полученных результатов следует, что в порядке возрастания сначала идут отрицательные числа в пунктах (1) и (3), затем — положительные в (4) и (2).

12. Укажите все такие целые числа n, при которых $n^3 - 1$ является простым числом.

Ответ: 2.

Решение. Так как $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ — простое число, то один из множителей равен −1 или +1. Рассмотрим эти случаи.

(1) Если $n^2 + n + 1 = 1$, то $n = 0$ или $n = -1$. В обоих случаях число $n^3 - 1$ отрицательное, то есть не простое.

(2) Если $n^2 + n + 1 = -1$, то $n = -n^2 - 2$ — отрицательное число. Тогда $n^3 - 1$ также отрицательно, то есть не простое.

(3) Если $n - 1 = 1$, то $n = 2$, $n^3 - 1 = 7$ — простое число.

(4) Если $n - 1 = -1$, то $n = 0$, тогда $n^3 - 1$ отрицательно, то есть не простое.

13. Укажите все такие целые числа n, при которых модуль числа $n^3 - 1000$ является простым числом.

Ответ: 9 и 11.

Решение. Так как $n^3 - 1000 = (n-10)(n^2 + 10n + 100)$ — модуль простого числа, то один из множителей равен −1 или +1.

Так как $n^2 + 10n + 1000 = (n+5)^2 + 975$, то значение выражения во второй скобке больше 1.

Если значение первой скобки равно −1 или +1, то $n = 9$ или $n = 11$. Оба подходят. В первом случае получаем $9^3 - 1000 = -271$, число 271 — простое. Во втором случае получаем $11^3 - 1000 = 331$, число 331 — простое.

14. Какова сумма цифр числа, являющегося произведением чисел 699…997 (111 девяток) и 700…003 (111 нулей)?

Ответ: 2020.

Решение. Пусть $a = 700\ldots00$ (112 нулей). Тогда искомое произведение равно $(a-3)(a+3) = a^2 - 9$.

В таком виде не сложно найти его значение:
$700\ldots00^2 - 9 = 49\,00\ldots00 - 9 = 48\,99\ldots991$ (223 девятки).
Сумма цифр равна 4 + 8 + 9 · 223 + 1 = 2020.

15. Вычислите значение выражения:

$$\frac{21 \cdot 8^3 \cdot 3^7 - 2^{10} \cdot 81^2}{6^8 \cdot 5}.$$

Ответ: 2.

Решение. Удобно преобразовать выражение и потом найти значение:

$$\frac{21 \cdot 8^3 \cdot 3^7 - 2^{10} \cdot 81^2}{6^8 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2^9 \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^8}{2^8 \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 - 2^2}{5} = 2.$$