Блок 8. Алгебра

Подготовительное занятие

- Сумма вычитаемого, уменьшаемого и разности равна 2019. Найдите уменьшаемое.
- Числа a, b таковы, что $a + b = 2, a \cdot b = -15$. Найти $a^2 + b^2$.

1. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько пятёрок было больше, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?
2. Числа a, b таковы, что $a - b = 2, a \cdot b = 15$. Найти $a^3 - b^3$.
3. Прямоугольник разбили на четыре прямоугольника двумя прямыми, параллельными его сторонам. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.
4. Как быстро сосчитать $200\,001 \cdot 199\,999$?
5. Сравните значение выражения $400^5 - 399^2(400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$ с числом 2000.
6. Существуют ли такие целые числа x, y и z, при которых значение выражения $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ равно (а) 2018, (б) 2019?
7. Сколькими способами число 23 можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?
8. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел, которые связаны соотношением

   (а) $ab + a + b = 22$,

   (б) $2ab + a + 2b = 23$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

Блок 8. Алгебра

Подготовительное занятие

- Сумма вычитаемого, уменьшаемого и разности равна 2019. Найдите уменьшаемое.
- Числа a, b таковы, что $a + b = 2, a \cdot b = -15$. Найти $a^2 + b^2$.

1. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько пятёрок было больше, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?
2. Числа a, b таковы, что $a - b = 2, a \cdot b = 15$. Найти $a^3 - b^3$.
3. Прямоугольник разбили на четыре прямоугольника двумя прямыми, параллельными его сторонам. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.
4. Как быстро сосчитать $200\,001 \cdot 199\,999$?
5. Сравните значение выражения $400^5 - 399^2(400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$ с числом 2000.
6. Существуют ли такие целые числа x, y и z, при которых значение выражения $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ равно (а) 2018, (б) 2019?
7. Сколькими способами число 23 можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?
8. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел, которые связаны соотношением

   (а) $ab + a + b = 22$,

   (б) $2ab + a + 2b = 23$.

karusel.desc.ru ~ 297 ~

Блок 8. Алгебра

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено задачам, при решении которых необходимы преобразования алгебраических выражений.

На занятии полезно разобрать решение № 4 (помогает для решения задачи № 5) и решение № 8 (а) (помогает для решения № 8 (б)).

- Сумма вычитаемого, уменьшаемого и разности равна 2019. Найдите уменьшаемое.

  Ответ: 1009,5.

  Решение. Пусть a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность, о которых говорится в условии. Тогда верны два соотношения: $a-b=c$ и $a+b+c=2019$. Подставляя c из первого соотношения во второе, получаем:

  $2019=a+b+c=a+b+(a-b)=2a$.

  Тогда $2a=2019$, то есть $a=1009{,}5$.

  Комментарий 1. Конечно, можно рассуждать по действиям: уменьшаемое равно сумме вычитаемого и разности, поэтому в указанной сумме уменьшаемое составляет половину. Откуда уменьшаемое равно 2019 : 2 = 1009,5.

  Комментарий 2. Чему равны вычитаемое и разность найти нельзя. Подойдёт любая пара, для которой $1009{,}5-b=c$.

- Числа a, b таковы, что $a+b=2$, $a\cdot b=-15$. Найти a^2+b^2.

  Указание. Укажите формулу, в которой присутствуют $a+b$, $a\cdot b$ и a^2+b^2.

  Ответ: 34.

  Решение. Известно, что $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.
  Значит, $2^2=(a^2+b^2)+2\cdot(-15)$, откуда $a^2+b^2=2^2+2\cdot 15=34$.

1. За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок «3», «4» или «5». На сколько пятёрок было больше, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

   Ответ: на 6.

   Решение. Пусть a школьников получили тройку, b школьников — четверку, c школьников — пятёрку. Из условия задачи $a+b+c=25$ и $3a+4b+5c=106$.

   Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 4. Получаем:
   $(3a+4b+5c)-4(a+b+c)=c-a=106-4\cdot 25=6$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

   Значит, пятерок получено на 6 больше, чем троек.

2. Числа a, b таковы, что $a-b=2$, $a\cdot b=15$. Найти a^3-b^3.

   Ответ: 98.

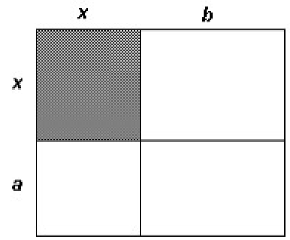
   Решение. Известно, что $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

   Преобразуем вторую скобку, чтоб появилась разность $a-b$:

   $a^2+ab+b^2=a^2-2ab+b^2+3ab=(a-b)^2+3ab$.

   Тогда $a^3-b^3=2\cdot(2^2+3\cdot 15)=98$.

3. Прямоугольник разбили на четыре прямоугольника двумя прямыми, параллельными его сторонам. Один из них оказался квадратом, а периметры прямоугольников, соседних с ним, равны 20 см и 16 см. Найдите площадь исходного прямоугольника.

   Ответ: 80 см².

   Решение. Введем обозначения так, как показано на рисунке справа. Полупериметры прямоугольников, о которых говорится в условии, равны 10 см и 8 см. Значит, $a+x=8$ и $b+x=10$. Искомая площадь исходного прямоугольника равна $(a+x)(b+x)=80$ см².

4. Как быстро сосчитать 200 001 · 199 999?

   Решение. Пусть $a=200\,000$. Тогда произведение равно $(a+1)(a-1)=a^2-1$. В таком виде считать легко:
   $200\,000^2-1=40\,000\,000\,000-1=39\,999\,999\,999$.

5. Сравните значение выражения $400^5-399^2(400^3+2\cdot 400^2+3\cdot 400+4)$ с числом 2000.

   Ответ: первое число меньше второго.

   Решение. Пусть $a=400$.

   Выражение примет вид $a^5-(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+4)$. Преобразуем его:

   $a^5-(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+4)=$
   $=a^5-(a^2-2a+1)(a^3+2a^2+3a+4)=$
   $=5a-4$.

   Значит, значение выражения равно 5 · 400 – 4 = 2000 – 4, что меньше 2000.

Комментарий. Умножать скобки $(a^2-2a+1)(a^3+2a^2+3a+4)$ проще, если заполнять такую таблицу умножения:

	a^3	$2a^2$	$3a$	4
a^2	a^5	$2a^4$	$3a^3$	$4a^2$
$-2a$	$-2a^4$	$-4a^3$	$-6a^2$	$-8a$
1	a^3	$2a^2$	$3a$	4

6. Существуют ли такие целые числа x, y и z, при которых значение выражения $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ равно (а) 2018, (б) 2019?

Ответ: (а) нет, (б) нет.

(а) Решение. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=$$
$$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+$$
$$+(y^3-3y^2z+3yz^2-z^3)+$$
$$+(z^3-3z^2x+3zx^2-x^3)=$$
$$=3(-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2).$$

Если x, y и z — целые числа, то значение данного выражения кратно трём. Но 2018 не делится на 3.

(б) Решение. Если целые числа x, y и z одной чётности, то данное выражение — сумма трёх чётных чисел. Значит, его значение — чётное число.

Если из целых чисел x, y и z одно — одной чётности, а два — другой, то данное выражение — сумма одного чётного и двухя нечётных чисел. Значит, его значение — чётное число.

В любом случае значение не может быть равным нечётному числу 2019.

7. Сколькими способами число 23 можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?

Ответ: 4 способами.

Решение. Пусть $a^2-b^2=23$, где a,b — целые числа. Тогда $(a-b)(a+b)=23$. Значит, $a-b$ и $a+b$ — пара целых чисел, произведение которых 23. Так как 23 — простое, то эта одна из пар (1; 23), (23; 1), (−1; −23), (−23; −1).

Если $a-b=1$ и $a+b=23$, то $(a-b)+(a+b)=2a=1+23=24, a=12$. Тогда $b=23-a=23-12=11$.

Аналогично можно найти значения a,b в остальных трёх случаях.

Значит, искомых пар — ровно 4.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

8. Найдите все пары $(a;b)$ целых чисел, которые связаны соотношением

(а) $ab+a+b=22$,

(б) $2ab+a+2b=23$.

Указание. Из решения предыдущей задачи видно, что выгодно получить соотношение, в котором с одной стороны целое число, с другой — произведение двух выражений, значения которых — целые числа.

(а) Ответ: (0; 22), (22; 0), (−2; −24), (−24; −2).

Решение. Преобразуем данное соотношение:
$ab+a+b=22$,
$a(b+1)+b=22$,
$a(b+1)+(b+1)=23$,
$(a+1)(b+1)=23$.

Значит, $a+1$ и $b+1$ — пара целых чисел, произведение которых 23. Так как 23 — простое, то эта одна из пар (1; 23), (23; 1), (−1; −23), (−23; −1). Тогда искомые пары — это (0; 22), (22; 0), (−2; −24), (−24; −2).

(б) Ответ: (23; 0), (−25; −1), (7; 1), (−9; −2).

Решение. Преобразуем данное соотношение:
$2ab+a+2b=23$,
$a(2b+1)+2b=23$,
$a(2b+1)+(2b+1)=24$,
$(a+1)(2b+1)=24$.

Значит, $a+1$ и $2b+1$ — пара целых чисел, произведение которых 24. Таких пар много. Заметим, что число $2b+1$ — нечётно. Значит, достаточно рассмотреть пары (24; 1), (−24; −1), (8; 3), (−8; −3).

Тогда искомые пары — это (23; 0), (−25; −1), (7; 1), (−9; −2).