

## Блок 9. Комбинаторика в вероятности

### Задания Интернет-карусели (2020)

1. **Таблицы данных.** Один из самых распространенных видов представления информации — таблицы.

В данной таблице указаны данные некоторого исследования: население одних из крупнейших городов мира, их население, площадь и плотность населения.

Город	Население	Площадь	Плотность
Шанхай	17 640 000	6 300	2 800
Гуанчжоу	13 320 000	7 400	
Карачи	12 953 600	3 520	3 680
Мумбаи	12 420 000	600	
Москва	11 972 700		4 770
Стамбул	11 320 800	5 340	2 120

Население — количество жителей, площадь указана в кв. километрах, плотность — среднее число жителей на 1 кв. км площади города.

Как видно, пропущено три числа. Восстановите числа и найдите их сумму.

2. **Среднее значение.** Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.

В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Зарплата остальных осталась без изменений. Сколько рублей составила в мае средняя зарплата в магазине?

3. В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Одного сотрудника уволили, а зарплата остальных осталась без изменений. После этого средняя зарплата в магазине не изменилась. Сколько рублей составляла зарплата уволенного сотрудника?
4. **Медиана.** Медианой набора чисел называется такое число, которое разделяет набор (записанный по возрастанию) на две равные части. Вместо «медиана» можно сказать «середина».

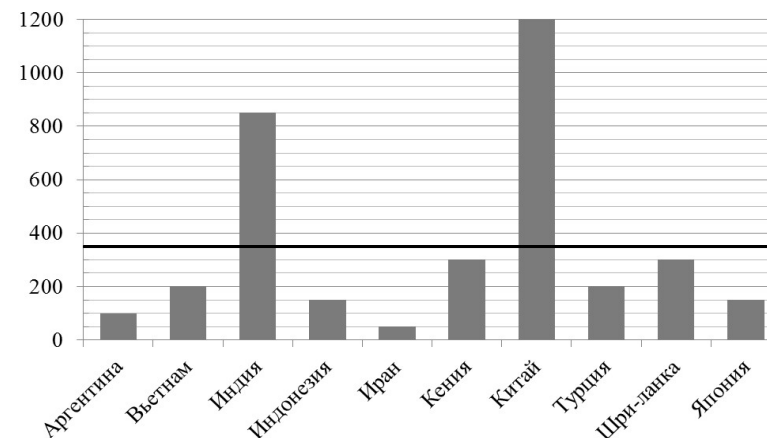
Алгоритм нахождения медианы:

- упорядочить числовой набор по возрастанию;
- одновременно зачеркнуть самое большое и самое маленькое числа этого набора до тех пор, пока не останется одно или два числа;

(3) если осталось одно число, то оно и есть медиана; если остались два числа, то медианой будет среднее арифметическое этих чисел.

Например, медианой набора выборки {11, 9, 3, 5, 5} является число 5, медианой выборки {3, 4, 5, 6, 7, 2020} является число 5,5.

На диаграмме представлено годовое производство чая в 10 странах, являющихся крупнейшими производителями чая в мире. На вертикальной оси отмечено масса чая в тысячах тонн.

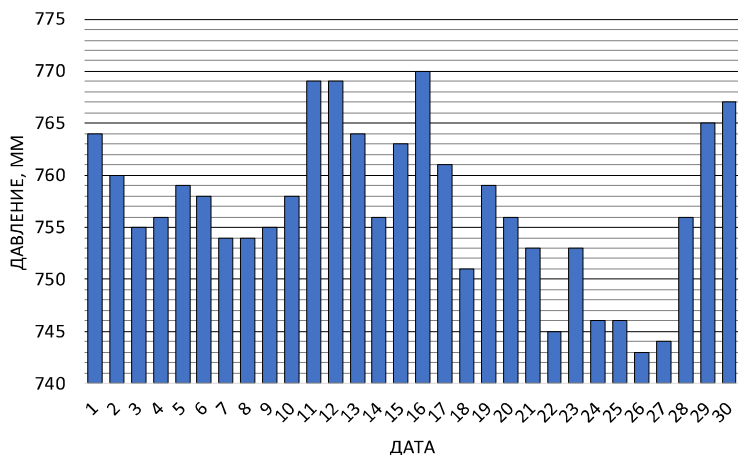


На сколько среднее производство от медианы указанных значений?

5. В ряд выписаны различные числа в порядке возрастания. Известно, что 15-ое число равно 17, оно является и медианой, и средним арифметическим всех чисел. Чему равна сумма выписанных чисел?
6. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?
7. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?
8. **Размах.** Размах набора чисел — разность между наибольшим и наименьшим из чисел. Например, размах набора {−1; 2; −3; 4} равен  $4 - (-3) = 7$ , размах набора {1; 1; 2; 2; 3; 3} равен  $3 - 1 = 2$ .

Дана диаграмма с данными об атмосферном давлении в Москве за ноябрь 2018 года.

Атмосферное давление. Москва, ноябрь 2018



Определите по диаграмме *размах* данных.

- Выписали квадраты 20 последовательных целых чисел. Какой наименьший *размах* может быть у этого набора чисел?
- Мода.** *Мода* — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Иногда в совокупности встречается более чем одна мода. Например, мода набора {6; 2; 6; 6; 8; 9; 9; 9; 0} — числа 6 и 9.  
Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 4,6. Какова мода его набора оценок?
- Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 3,6. Какова мода его набора оценок?
- Среднее арифметическое семи чисел равно 100. Если из этого набора убрать первое число, то среднее арифметическое уменьшится на 1, если убрать второе число — уменьшится на 2, ..., если убрать шестое число — уменьшится на 6. А на сколько изменится среднее, если убрать 7 число?
- Дан набор из 11 целых чисел. Размах набора равен 30, мода — 3, медиана — 8. Какое наибольшее значение может иметь их среднее арифметическое?
- Герман выполнял домашнее задание по статистике. Ему был дан числовой набор {5; -2; -3; 4; -1; 0; -1; 1; 6}. Он нашёл 4 числа: среднее арифметическое этого набора, его медиану, размах и моду. Чему равна сумма этих 4 чисел?

- В ряд написаны 20 различных натуральных чисел в порядке возрастания. Среднее арифметическое равно предпоследнему числу в ряду, и оно больше медианы на 30. Какое минимальное значение может быть у последнего числа?
- Каждый раз, когда учительница ставит Вовочке очередную оценку по математике в электронный дневник (от 2 до 5), он записывает себе медиану всех оценок в блокнотик. В какой-то момент у Вовочки был выписан следующий ряд: 2; 3; 4; 3,5; 4; 3,5; 4; 4,5; 4; 4,5. Каково среднее арифметическое оценок Вовочки на этот момент?
- В ряд написано 2020 чисел. Если из этого ряда выкинуть одно из чисел, то медианой будет число 1234, а если выкинуть другое число, то медианой будет 1254. Чему равна медиана изначального ряда?
- В таблице представлены данные по средней температуре (дневной и ночной) в Москве в течение апреля 2020 года. На сколько градусов среднее значение дневных показаний больше средних значений ночной температуры?

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1 +3° ночь -6°	2 +4° ночь +1°	3 +10° ночь +2°	4 +7° ночь +4°	5 +4° ночь -1°
6 +4° ночь -1°	7 +9° ночь -3°	8 +12° ночь +6°	9 +15° ночь +2°	10 +9° ночь +10°	11 +4° ночь -1°	12 +7° ночь -2°
13 +15° ночь +2°	14 +7° ночь +10°	15 +6° ночь +3°	16 +5° ночь +2°	17 +6° ночь +2°	18 +5° ночь 0°	19 +6° ночь +1°
20 +8° ночь +1°	21 +9° ночь +1°	22 +6° ночь +5°	23 +9° ночь +2°	24 +8° ночь -1°	25 +8° ночь +5°	26 +9° ночь 0°
27 +10° ночь +2°	28 +10° ночь +2°	29 +13° ночь +8°	30 +10° ночь +2°			



19. В ряд написано 33 числа. Среди них есть такое, что если его выкинуть, то медианой будет число 29. Также есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 31. И еще есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 39. А чему равна медиана изначального ряда?
20. В магазине продавали арахис стоимостью 150 рублей за килограмм и фисташки стоимостью 350 рублей за килограмм. Общая стоимость фисташек и арахиса, которые есть в наличии, одинакова. Стажер случайно смешал все орехи в одну кучу. По какой стоимости (рублей за килограмм) нужно продавать их смесь?



## Блок 9. Комбинаторика в вероятности

### Задания Интернет-карусели (2020). Указания, ответы и решения

Содержание заданий данной карусели ориентировано на курс «Вероятность и статистика» для 7 класса проекта «Математическая вертикаль», реализуемого в г. Москве. В заданиях сформулированы определения всех специальных понятий. Есть как упражнения на понимание определений, так и задачи, где надо учитывать разные понятия. Соревнование, в том числе, нацелено на изучение такого материала.

1. **Таблицы данных.** Один из самых распространенных видов представления информации — таблицы.

В данной таблице указаны данные некоторого исследования: население одних из крупнейших городов мира, их население, площадь и плотность населения.

Город	Население	Площадь	Плотность
Шанхай	17 640 000	6 300	2 800
Гуанчжоу	13 320 000	7 400	
Карачи	12 953 600	3 520	3 680
Мумбаи	12 420 000	600	
Москва	11 972 700		4 770
Стамбул	11 320 800	5 340	2 120

Население — количество жителей, площадь указана в кв. километрах, плотность — среднее число жителей на 1 кв. км площади города.

Как видно, пропущено три числа. Восстановите числа и найдите их сумму.

Ответ: 25010.

Указание: пропущены числа 1 800, 20 700, 2 510.

Решение. По смыслу понятно, что «население» = «площадь» × «плотность». Это нетрудно проверить по полностью заполненным строкам. Значит, пропущены числа  $13320000 : 7400 = 1800$ ,  $12420000 : 600 = 20700$  и  $11972700 : 4770 = 2510$ . Искомая сумма равна  $1800 + 20700 + 2510 = 25010$ .

Таблица со всеми числами:

Город	Население	Площадь	Плотность
Шанхай	17 640 000	6 300	2 800
Гуанчжоу	13 320 000	7 400	1 800
Карачи	12 953 600	3 520	3 680
Мумбаи	12 420 000	600	20 700
Москва	11 972 700	2 510	4 770
Стамбул	11 320 800	5 340	2 120

2. **Среднее значение.** Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.

В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Зарплата остальных осталась без изменений. Сколько *рублей* составила в мае средняя зарплата в магазине?

Ответ: 78430.

Решение. Суммарная зарплата в апреле равна  $78,6 \cdot 20 = 1572$  тыс. рублей. В мае она стала равной  $1572 - 5,7 + 2,3 = 78,43$  тыс. рублей или 78 430 рублей.

3. В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Одного сотрудника уволили, а зарплата остальных осталась без изменений. После этого средняя зарплата в магазине не изменилась. Сколько *рублей* составляла зарплата уволенного сотрудника?

Ответ: 75200.

Решение. Суммарная зарплата в апреле равна  $20 \cdot 78600$ , в мае —  $19 \cdot 78600$ , она уменьшилась на 78600. При этом на  $5700 - 2300 = 3400$  рублей она уменьшилась за счет изменения зарплат, а еще на  $78600 - 3400 = 75200$  она уменьшилась на величину зарплаты уволенного сотрудника.

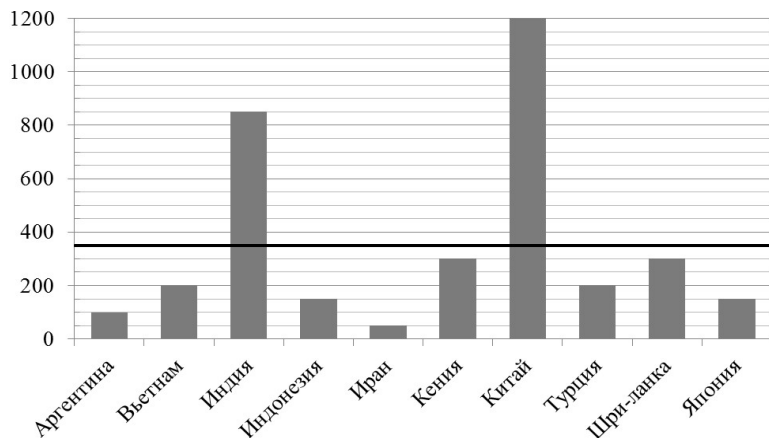
4. **Медиана.** Медианой набора чисел называется такое число, которое разделяет набор (записанный по возрастанию) на две равные части. Вместо «медиана» можно сказать «середина».

Алгоритм нахождения медианы:

- (1) упорядочить числовой набор по возрастанию;
- (2) одновременно зачеркнуть самое большое и самое маленькое числа этого набора до тех пор, пока не останется одно или два числа;
- (3) если осталось одно число, то оно и есть медиана; если остались два числа, то медианой будет среднее арифметическое этих чисел.

Например, медианой набора выборки {11, 9, 3, 5, 5} является число 5, медианой выборки {3, 4, 5, 6, 7, 2020} является число 5,5.

На диаграмме представлено годовое производство чая в 10 странах, являющихся крупнейшими производителями чая в мире. На вертикальной оси отмечено масса чая в тысячах тонн.



На сколько среднее производство от медианы указанных значений?

Ответ: 150.

Решение. Выпишем данные в виде набора чисел: {100; 200; 850; 150; 50; 300; 1200; 200; 300; 150}. Среднее равно 350. Упорядочим числа в порядке возрастания: {50; 100; 150; 150; 200; 200; 300; 300; 850; 1200}. Медиана равна среднему между числами 200 и 200, то есть равна 200. Искомая величина  $350 - 200 = 150$ .

5. В ряд выписаны различные числа в порядке возрастания. Известно, что 15-ое число равно 17, оно является и медианой, и средним арифметическим всех чисел. Чему равна сумма выписанных чисел?

Ответ: 493.

Решение. Если 15-е число — медиана, то до него в ряду 14 чисел и после него 14 чисел, то есть всего  $14 + 14 + 1 = 29$  чисел. Среднее арифметическое равно 17, поэтому сумма равна  $29 \cdot 17 = 493$ .

6. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

Ответ: 42.

Решение. Сумма всех чисел равна  $23 \cdot 7 = 161$ . Расположим числа в порядке возрастания. Первые три числа меньше 11, далее идёт число 11, потом три числа больше 11.

Чтобы последнее число было как можно меньше, нужно сделать сумму остальных чисел как можно больше. Сумма первых трёх чисел не более  $8 + 9 + 10 = 27$ . Сумма последних трёх не менее  $161 - 11 - 27 = 123$ .

Набор {8; 9; 10; 11; 40; 41; 42} удовлетворяет условию. Если последнее число меньше 42, то сумма последних трёх чисел не более  $39 + 40 + 41 = 120$ , что невозможно. Значит, 42 — наименьшее возможное последнее число набора.

7. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

Ответ: 119.

Решение. Среднее арифметическое семи чисел равно 23, поэтому их сумма равна  $7 \cdot 23 = 161$ . Расположим числа в порядке возрастания. Чтобы последнее число было больше, сумма остальных должна быть как можно меньше.

Сумма первых трех чисел не менее  $1 + 2 + 3 = 6$ . Четвертое число равно 11 (это медиана). Сумма следующих двух чисел не менее  $12 + 13 = 25$ . Тогда последнее число не более  $161 - 6 - 11 - 25 = 119$ .

При этом набор чисел {1; 2; 3; 11; 12; 13; 119} удовлетворяет условию.

8. **Размах.** Размах набора чисел — разность между наибольшим и наименьшим из чисел. Например, размах набора {−1; 2; −3; 4} равен  $4 - (-3) = 7$ , размах набора {1; 1; 2; 2; 3; 3} равен  $3 - 1 = 2$ .

Дана диаграмма с данными об атмосферном давлении в Москве за ноябрь 2018 года.



Определите по диаграмме *размах* данных.

Ответ: 27.

Решение. Наименьшее значение (26 ноября) равно 743, наибольшее (16 ноября) — 770. Размах равен  $770 - 743 = 27$ .

9. Выписали квадраты 20 последовательных целых чисел. Какой наименьший *размах* может быть у этого набора чисел?

Ответ: 100.

Указание. Интуитивно понятно, что размах минимальный, если выписаны квадраты чисел от  $-9$  до  $10$  или от  $-10$  до  $9$ . Как обосновать, что иначе размах больше, показано в решении.

Решение. Если выписаны квадраты чисел от  $-9$  до  $10$  (или от  $-10$  до  $9$ ), то наименьшее число равно  $0$ , наибольшее —  $10^2 = 100$ . Размах равен  $100 - 0 = 100$ .

Покажем, что размах всегда не менее  $100$ , то есть в наборе найдутся 2 числа, отличающихся не менее чем на  $100$ .

Среди данных чисел не менее  $19$  не равны  $0$ . Тогда по крайней мере  $10$  из них имеют один знак (все положительны или все отрицательны). Поэтому найдутся два числа  $a^2$  и  $b^2$ , что  $a - b \geq 10$ . Так как они последовательные и одного знака, то  $|a + b| \geq 10$ . Тогда  $|a^2 - b^2| = |a - b| \cdot |a + b| \geq 10 \cdot 10 = 100$ .

10. **Мода.** *Мода* — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Иногда в совокупности встречается более чем одна мода. Например, мода набора  $\{6; 2; 6; 6; 8; 9; 9; 9; 0\}$  — числа  $6$  и  $9$ .

Петя на уроках статистики за четверть получил  $10$  оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен  $4,6$ . Какова мода его набора оценок?

Ответ: 5.

Решение. Средний балл  $4,6$ , поэтому сумма всех  $10$  оценок  $10 \cdot 4,6 = 46$ .

Если «5» — не мода, то получено не более  $5$  пятерок, а общая сумма оценок не более  $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 45$ , что меньше  $46$ . Значит, мода — «5».

11. Петя на уроках статистики за четверть получил  $10$  оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен  $3,6$ . Какова мода его набора оценок?

Ответ: 3 или 4.

Решение. Средний балл  $3,6$ , поэтому сумма всех  $10$  оценок  $10 \cdot 3,6 = 36$ .

Если мода — «5» (и может вместе с ней еще какие-то оценки), пятерок не менее четырех. Тогда суммарный балл не менее  $4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 38$ , то есть более  $36$ .

Мода может быть «3» — подходит набор  $\{3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5\}$ .

Мода может быть «4» — подходит набор  $\{3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4\}$ .

Мода не может состоять из «3» и «4». Действительно, если так, то этих оценок по  $4$  или по  $5$  штук, на пятерки остаётся  $36 - 4(3 + 4) = 8$  баллов или  $36 - 5(3 + 4) = 1$  балл, что невозможно.

12. Среднее арифметическое семи чисел равно  $100$ . Если из этого набора убрать первое число, то среднее арифметическое уменьшится на  $1$ , если убрать второе число — уменьшится на  $2$ , ..., если убрать шестое число — уменьшится на  $6$ . А на сколько изменится среднее, если убрать  $7$  число?

Ответ: 21.

Решение. Сумма данных чисел равна  $100 \cdot 7 = 700$ .

Сумма данных чисел без первого равна  $(100 - 1) \cdot (7 - 1) = 594$ , первое число равно  $700 - 594 = 106$ .

Аналогично, второе число равно  $700 - (100 - 2) \cdot (7 - 1) = 112$ .

Третье число равно  $700 - (100 - 3) \cdot (7 - 1) = 118$ .

Четвертое число равно  $700 - (100 - 4) \cdot (7 - 1) = 124$ .

Пятое число равно  $700 - (100 - 5) \cdot (7 - 1) = 130$ .

Шестое число равно  $700 - (100 - 6) \cdot (7 - 1) = 136$ .

Среднее арифметическое этих чисел равно  $(106 + 112 + \dots + 136) : 6 = 121$ . Искомое число  $121 - 100 = 21$ .

13. Дан набор из 11 целых чисел. Размах набора равен 30, мода — 3, медиана — 8. Какое наибольшее значение может иметь их среднее арифметическое?

Ответ: 17,(54).

Решение. Упорядочим числа по возрастанию. Будем искать ряд с наибольшей суммой. Сделаем несколько выводов из условия.

Медиана равна 8, значит первые пять чисел меньше 8, а последние пять чисел больше 8.

Мода — 3, значит есть число 3. Таких чисел не менее двух, чтоб оно было модой. Но троек не более пяти, иначе тройка будет медианой.

Размах — 30. Значит, последнее число не более 33.

Рассмотрим случаи, сколько чисел 3 может содержать ряд.

(1) Пусть в ряду 2 тройки. Тогда любое число встречается не более 1 раза. Наибольшую сумму будет иметь ряд {3; 3; 6; 7; 8; 29; 30; 31; 32; 33}. Сумма ряда равна 182.

(2) Пусть в ряду 3 тройки. Тогда любое число встречается не более 2 раз. Наибольшую сумму будет иметь ряд {3; 3; 3; 7; 8; 8; 31; 32; 32; 33; 33}. Сумма ряда равна 193.

(3) Пусть в ряду 4 тройки. Тогда любое число встречается не более 3 раз. Наибольшую сумму будем иметь ряд {3; 3; 3; 3; 8; 8; 32; 32; 33; 33; 33}. Сумма ряда равна 191.

(4) Пусть в ряду 5 троек. Тогда любое число встречается не более 4 раз. Наибольшую сумму будем иметь ряд {3; 3; 3; 3; 3; 8; 33; 33; 33; 33; 33}. Сумма ряда равна 188.

Таким образом, максимальная возможная сумма равна 193, среднее арифметическое равно  $193/11 = 17,(54)$ .

14. Герман выполнял домашнее задание по статистике. Ему был дан числовой набор {5; -2; -3; 4; -1; 0; -1; 1; 6}. Он нашёл 4 числа: среднее арифметическое этого набора, его медиану, размах и моду. Чему равна сумма этих 4 чисел?

Ответ: 9.

Указание. Выпишем 10 чисел по возрастанию: {-3; -2; -1; -1; 0; 1; 4; 5; 6}. Сумма равна 9, среднее арифметическое — 1. Медиана равна 0. Размах — 9. Мода равна -1. Искомая сумма  $1 + 0 + 9 + (-1) = 9$ .

15. В ряд написаны 20 различных натуральных чисел в порядке возрастания. Среднее арифметическое равно предпоследнему числу в ряду, и оно больше медианы на 30. Какое минимальное значение может быть у последнего числа?

Ответ: 453.

Решение. Пусть медиана равна  $n$ . По условию предпоследнее число ряда равно  $n + 30$ , оно же — среднее арифметическое, поэтому сумма всех чисел равна  $20(n + 30) = 20n + 600$ . Чтобы последнее число было минимальным, сумма остальных должна быть максимальной.

Медиана  $n$  — среднее арифметическое 10-го и 11-го числа, поэтому 10-ое число равно  $n - a$ , 11-ое число равно  $n + a$ , где  $a$  — некоторое натуральное число.

Сумма чисел с 1-го по 9-е максимальна, если это последовательные числа перед 10-ым числом, то есть числа  $(n - a) - 9, (n - a) - 8, \dots, (n - a) - 1$ . Сумма таких чисел равна  $9n - 9a - 45$ .

Сумма чисел с 12-го по 18-е максимальна, если это последовательные числа перед предпоследним, то есть числа  $n + 23, n + 24, \dots, n + 29$ . Сумма таких чисел равна  $9n + 182$ .

Тогда наибольшая сумма всех чисел, кроме последнего, равна  $(9n - 9a - 45) + (9n + 182) + (n + 30) = 19n - 9a + 167$ . При этом последнее число равно  $(20n + 600) - (19n - 9a + 167) = n + 9a + 433$ . Заметим, что медиана  $n$  не менее 11. Тогда последнее число наименьшее при  $n = 11, a = 1$ , оно равно  $11 + 9 + 433 = 453$ .

Остаётся заметить, что такое возможно. В этом случае дан ряд {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 453}.

16. Каждый раз, когда учительница ставит Вовочке очередную оценку по математике в электронный дневник (от 2 до 5), он записывает себе медиану всех оценок в блокнотик. В какой-то момент у Вовочки был выписан следующий ряд: 2; 3; 4; 3,5; 4; 3,5; 4; 4,5; 4; 4,5. Каково среднее арифметическое оценок Вовочки на этот момент?

Ответ: 3,8, 3,9, 4 или 4,1.

Решение. (1) Чтобы первая медиана была равна 2, первая оценка должна быть «2». (2) Для второй медианы 3 вторая оценка должна быть «4».

(3) Далее, чтобы медиана была 4 нужно добавить «4» или «5». Запишем, что на данный момент получены оценки «2», «4», «4/5».

(4) Для медианы 3,5 надо добавить «3». Имеем «2», «3», «4», «4/5».

(5) Для медианы 4 можно добавить «4» или «5». Имеем «2», «3», «4», «4/5», «4/5».

(6) Для медианы 3,5 можно добавить «2» или «3». Имеем «2», «2/3», «3», «4», «4/5», «4/5».

(7) Для медианы 4 надо добавить «4» или «5». Имеем «2», «2/3», «3», «4», «4/5», «4/5», «4/5».

(8) Для медианы 4,5 надо иметь 5 пятерок. Значит, набор должен быть «2», «2/3», «3», «4», «5», «5», «5», «5».

(9) Для медианы 4 можно добавить «2», «3» или «4». Значит, набор должен быть «2», «2/3», «3», «2/3/4», «4», «5», «5», «5», «5».

(10) Для медианы 4,5 надо добавить «5». Значит, набор должен быть «2», «2/3», «3», «2/3/4», «4», «5», «5», «5», «5», «5».

При этом сумма всех оценок равна 38, 39, 40 или 41. Среднее арифметическое оценок равно 3,8, 3,9, 4 или 4,1.





























17. В ряд написано 2020 чисел. Если из этого ряда выкинуть одно из чисел, то медианой будет число 1234, а если выкинуть другое число, то медианой будет 1254. Чему равна медиана изначального ряда?

Ответ. 1244.

Решение. Выпишем числа по возрастанию. Так количество чисел ряда чётно, то его медиана — среднее арифметическое 1010-ого и 1011-ого чисел. Если выкинуть одно число, то медианой будет 1010-е или 1011-е число.

Значит, указанные числа ряда равны 1234 и 1254, а медиана всего ряда равна  $(1234 + 1254) : 2 = 1244$ .

18. В таблице представлены данные по средней температуре (дневной и ночной) в Москве в течение апреля 2020 года. На сколько градусов среднее значение дневных показаний больше средних значений ночной температуры?

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5
		 +3° ночь -6°	 +4° ночь +1°	 +10° ночь +2°	 +7° ночь +4°	 +4° ночь -1°
6	7	8	9	10	11	12
 +4° ночь -1°	 +9° ночь -3°	 +12° ночь +6°	 +15° ночь +2°	 +9° ночь +10°	 +4° ночь -1°	 +7° ночь -2°
13	14	15	16	17	18	19
 +15° ночь +2°	 +7° ночь +10°	 +6° ночь +3°	 +5° ночь +2°	 +6° ночь +2°	 +5° ночь 0°	 +6° ночь +1°
20	21	22	23	24	25	26
 +8° ночь +1°	 +9° ночь +1°	 +6° ночь +5°	 +9° ночь +2°	 +8° ночь -1°	 +8° ночь +5°	 +9° ночь 0°
27	28	29	30			
 +10° ночь +2°	 +10° ночь +2°	 +13° ночь +8°	 +10° ночь +2°			

Ответ: 6.

Указание. Быстрее найти среднее разностей между указанными дневной и ночной температурами, что равно искомой величине.

19. В ряд написано 33 числа. Среди них есть такое, что если его выкинуть, то медианой будет число 29. Также есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 31. И еще есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 39. А чему равна медиана изначального ряда?

Ответ: 37.

Решение. Выпишем числа по возрастанию. Если выкинули 1-е, 2-е, ..., 15-е или 16-е число, то медианой станет среднее арифметическое 17-го и 18-го чисел. Если выкинули 17-е число, то медианой станет среднее арифметическое 16-го и 18-го чисел. Если выкинули 18-е, 19-е, ..., 32-е или 33-е... число, то медианой станет среднее арифметическое 16-го и 17-го чисел.



Вывод: если 16-е, 17-е, 18-е числа данного ряда в некотором порядке равны  $a, b, c$ , то  $a + b = 29 \cdot 2$ ,  $b + c = 31 \cdot 2$ ,  $c + a = 39 \cdot 2$ .

Найдём значения  $a, b, c$ :

$$a + b + c = ((a + b) + (b + c) + (c + a)) : 2 = (29 \cdot 2 + 31 \cdot 2 + 39 \cdot 2) : 2 = 99;$$

$$a = (a + b + c) - (b + c) = 99 - 31 \cdot 2 = 37,$$

$$b = (a + b + c) - (c + a) = 99 - 39 \cdot 2 = 21,$$

$$c = (a + b + c) - (a + b) = 99 - 29 \cdot 2 = 41.$$

Медиана данного ряда — 17-е число, среднее между  $a, b, c$ . Оно равно 37.

20. В магазине продавали арахис стоимостью 150 рублей за килограмм и фисташки стоимостью 350 рублей за килограмм. Общая стоимость фисташек и арахиса, которые есть в наличии, одинакова. Стажер случайно смешал все орехи в одну кучу. По какой стоимости (рублей за килограмм) нужно продавать их смесь?

Ответ: 210.

Решение. Пусть в магазине было  $7x$  кг арахиса, он стоил  $150 \cdot 7x$  рублей. Значит, было  $150 \cdot 7x : 350 = 3x$  кг фисташек. Получилось  $10x$  кг смеси на  $2 \cdot 150 \cdot 7x = 2100x$  рублей. Её надо продавать за  $2100x : 10x = 210$  рублей за кг.