Блок 1. Линейные уравнения в целых числах

Задачи интернет-карусели (2019-2020)

1. Куплены плюшки по 6 рублей и ватрушки по 9 рублей за штуку, всего на сумму 60 рубля. Найдите общее число купленных плюшек и ватрушек.

2. Сколькими способами сумму в 5 руб. 33 коп. можно составить из монет по 2 коп. и 5 коп.?

3. В сети салонов сотовой связи работают 300 продавцов. В конце недели компания выдала премии: перевыполнившим план более чем на 20 % — по 20 долларов, перевыполнившим план более чем на 10 % — по 15 долларов 10 центов. Остальным премий не досталось. Всего на премии сеть потратила 2050 долларов. Сколько человек перевыполнили план более чем на 20 %?

4. Для какого наименьшего натурального числа n найдутся целые числа x и y, для которых выполнено $n = 8x + 4y$?

5. Найдите наименьшее значение выражения $|53 - 64k + 24n|$ при целых k и n.

6. В столовой продают компот из вишни по 10 руб., компот из сухофруктов по 4 руб., апельсиновый сок по 9 руб., яблочный сок по 7 руб. За час было продано 20 стаканов компота и 20 стаканов сока. При этом выручка за компот и сок оказалась одинаковой. Какое наибольшее число стаканов компота из вишни могло быть продано?

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что $11a - 6b = c, c - b = 7, a \leq 20$. Найдите значение c.

8. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 119×187. Сколько вершин клеток лежит на диагоналях этого прямоугольника?

9. Каждый день Петя съедает 3 или 5 конфет. За сколько дней могло быть съедено ровно 53 конфеты?

10. Для какого наименьшего натурального числа n найдутся целые числа x и y, для которых выполнено $n = 91x + 221y$?

11. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 119×187. На сколько частей диагональ прямоугольника делится границами клеток?

12. В салоне сотовой связи Лена и Витя соревновались в продаже чехлов для телефона. В первую неделю Витя продал чехлов на 30 % больше, чем Лена. Во вторую неделю Витя продала чехлов на 30 % меньше, чем Лена. При этом всего за две недели Витя продал чехлов на 10 % больше, чем Лена. Сколько минимальное количество чехлов могли продать они оба при этих условиях?

13. Валентина Петровна купила активированного угля в аптеке. При себе у нее было 100 руб. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась: перепутала местами число копеек и рублей. Получая сдачу, Валентина Петровна уронила 2 руб. 10 коп. и обнаружила, что у нее осталось в 2 раза больше, чем ей должны были сдать. На какую сумму (в копейках) Валентина Петровна купила активированного угля?

14. На острове Рыцарей и Лжецов 100 жителей. Однажды один из них сказал «Среди нас ровно один рыцарь», второй — «Количество рыцарей среди нас делится на 1», третий — «Среди нас ровно два рыцаря», четвертый — «Количество рыцарей делится на 2», …, 99-ый — «Среди нас ровно 50 рыцарей», 100-ый — «Количество рыцарей делится на 50». Сколько среди них могло быть рыцарей?

15. На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $97/(3m + 8n)$ является натуральным числом?

16. Оля нарисовала график функции $y = (7x + 5) : 9$ на промежутке, где x от 1 до 1000. Какое количество точек, обе координату которых целые, лежат на этом куске графика?

Блок 1. Линейные уравнения в целых числах

Задачи интернет-карусели (2019-2020). Указания и решения

- При решении задач удобно использовать формулы для решения линейных уравнений в целых числах.

- Пусть даны целые числа a, b, c. Нужно найти все такие пары целых чисел $(x; y)$, что выполнено $ax + by = c$.

  Если числа a, b кратны натуральному числу $d > 1$, то число с также должно делиться на d. То есть, обе части уравнения можно просто сократить на d.

  Значит, достаточно рассмотреть случай, когда НОД$(a; b) = 1$.

  Пусть нам известна $(x^*; y^*)$ — одна из искомых пар, то есть выполнено $ax^* + by^* = c$. Тогда $ax + by = ax^* + by^*$, откуда $a(x - x^*) = b(y^* - y)$.

  Так как НОД$(a; b) = 1$, то $x - x^*$ кратно b, $y^* - y$ кратно a. Значит, для некоторого целого числа t выполнено $x - x^* = bt, y^* - y = at$ или $x = x^* + bt, y = y^* - at$.

  С другой стороны, при любом t пара $(x^* + bt, y^* - at)$ подходит. Подставим значения в уравнение: $a(x^* + bt) + b(y^* - at) = (ax^* + by^*) + abt - abt = c$.

- В качестве примера рассмотрим уравнение, к которому сводится задача № 1. Нужно найти натуральные числа x, y, для которых $6x + 9y = 60$.

  Так как НОД$(6; 9) = 3$, то сократим уравнение на 3, получим $2x + 3y = 20$. Подходит пара $(10; 0)$. Значит, все решения описываются формулой $(10 + 3t; -2t)$.

  Чтобы найти натуральные числа, удовлетворяющие уравнению, надо найти, при каких t выполнено $10 + 3t > 0, -2t > 0$. Из первого $t \geq -3$, из второго $t \leq -1$. Значит, в формулу надо подставить значения t, равные -1, -2 и -3. Получатся пары $(7; 2)$, $(4; 4)$, $(1; 6)$.

- Сравните данные рассуждения с решением задачи № 1. Иногда удобно не выписывать общее решение уравнения, а рассуждать про делимость. В качестве примера подобных рассуждений посмотрите решение задачи № 3.

- За пределами наших рассуждений остался вопрос о том, как найти хотя бы одно решение данного уравнения. Смотрите комментарий к задаче № 10.

- Задача № 14 не относится к данной теме.

1. Куплены плюшки по 6 рублей и ватрушки по 9 рублей за штуку, всего на сумму 60 рубля. Найдите общее число купленных плюшек и ватрушек.

   Ответ: 7, 8, 9.

   Решение. Нужно найти $a + b$, если $6a + 9b = 60$, a, b — натуральные числа. Равенство упрощается до $2a + 3b = 20$. Так как первое слагаемое и сумма чётны, то $3b$ — чётно, откуда число b — чётно. При этом b не более чем $[20 : 3] = 6$. Значит, достаточно рассмотреть три случая:
   (1) $b = 2$, тогда $a = 7$, $a + b = 9$;
   (2) $b = 4$, тогда $a = 4$, $a + b = 8$;
   (3) $b = 6$, тогда $a = 1$, $a + b = 7$.

   Замечание. Если считать, что из двух видов товара мог быть куплен только один, то есть еще ответ: могли купить 10 плюшек и 0 ватрушек.

2. Сколькими способами сумму в 5 руб. 33 коп. можно составить из монет по 2 коп. и 5 коп.?

   Ответ: 53.

   Решение. Нужно найти количество решений уравнения $2x + 5y = 533$ в целых неотрицательных числах.

   Способ 1. Так как $x = (533 - 5y) : 2$ — целое число, если y — любое нечётное число. Заметим, $(264; 1)$ — решение с минимальным значением y, $(4; 105)$ — с максимальным значением y. От 1 до 105 всего 53 нечётных числа, поэтому всего 53 способа.

   Способ 2. Оно из решений — пара $(4; 105)$. Значит, общее решение уравнения $(4 + 5t; 105 - 2t)$, t — целое число. Необходимо выполнение условий $4 + 5t \geq 0$, $105 - 2t \geq 0$. Отсюда $0 \leq t \leq 52$ — всего 53 значения t, которые соответствуют 53 способам.

3. В сети салонов сотовой связи работают 300 продавцов. В конце недели компания выдала премии: перевыполнившим план более чем на 20 % — по 20 долларов, перевыполнившим план более чем на 10 % — по 15 долларов 10 центов. Остальным премий не досталось. Всего на премии сеть потратила 2050 долларов. Сколько человек перевыполнили план более чем на 20 %?

   Ответ: 27.

   Решение. Пусть x чел. перевыполнили план на 20 %, y чел. — на 10%. Из условия $20x + 15{,}1y = 2050$ или $200x + 151y = 20500$. Нужно найти количество решений последнего уравнения в целых неотрицательных числах при условии, что $x + y \leq 300$.

   Заметим, $200x$ и 20500 кратно 100, НОД $(151; 100) = 1$, поэтому y также кратно 100. С учётом ограничения получаем, что y равен 0, 100, 200 или 300. Проверяя каждое получаем, что подходит только пара $(27; 100)$.

4. Для какого наименьшего натурального числа n найдутся целые числа x и y, для которых выполнено $n = 8x + 4y$?

Ответ: 4.

Решение. При любых целых числах x и y, $n = 8x + 4y$ кратно 4. Поэтому, n не менее 4. При $x = 1, y = -1$ получаем $n = 4$.

Комментарий. Более сложный вариант этой задачи — задание № 10.

5. Найдите наименьшее значение выражения $|53 - 64k + 24n|$ при целых k и n.

Ответ: 3.

Решение. Так как НОД (64; 24) = 8, то $-64k + 24n$ кратно 8. Числа, кратные 8 и ближайшие к 53, — 48 и 56. Если $64k - 24n = 48$, то ответ 5, если $64k - 24n = 56$, то ответ 3. Во втором случае нужно найти хотя бы одно решение уравнения $64k - 24n = 56$ или $8k - 3n = 7$. Подходит, например, пара $k = 2, n = 3$.

6. В столовой продают компот из вишни по 10 руб., компот из сухофруктов по 4 руб., апельсиновый сок по 9 руб., яблочный сок по 7 руб. За час было продано 20 стаканов компота и 20 стаканов сока. При этом выручка за компот и сок оказалась одинаковой. Какое наибольшее число стаканов компота из вишни могло быть продано?

Ответ: 16.

Решение. Пусть было продано n стаканов компота из вишни и m стаканов апельсинового сока. Из условия $10n + 4(20 - n) = 9m + 7(20 - m), 3n = 30 + m$. Из последнего получаем, что m кратно 3. Так как $m \leq 20$, то наибольшее значение n при $m = 18$. При этом $n = 16$.

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что $11a - 6b = c, c - b = 7, a \leq 20$. Найдите значение c.

Ответ: 17, 28.

Указание. Избавьтесь от одной из переменных.

Решение. Из условия следует $c - 6 \cdot 7 = (11a - 6b) - 6(c - b) = 11a - 6c$, откуда $7c - 42 = 11a$. Левая часть кратна 7, НОД (7; 11) = 1, откуда a кратно 7. Так как $0 < a \leq 20$, то a равно 7 или 14. Отсюда несложно найти соответствующие значения b и c. Условиям удовлетворяют две тройки чисел: (7; 10; 17), (14; 21; 28).

8. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 119 × 187. Сколько вершин клеток лежит на диагоналях этого прямоугольника?

Ответ: 32.

Решение. Заметим, 119 = 7 · 17, 187 = 11 · 17. Значит, данный прямоугольник состоит из 17 × 17 прямоугольников 7 × 11. Диагональ состоит из диагоналей частей 7 × 11 и проходит только через вершины клеток, являющиеся вершинами

этих частей. Значит, на диагональ вершинами клеток делится на 17 частей 16 точками.

Так как диагонали не пересекаются в вершине клетки, то всего на двух диагоналях лежит 16 + 16 = 32 вершин клеток.

9. Каждый день Петя съедает 3 или 5 конфет. За сколько дней могло быть съедено ровно 53 конфеты?

Ответ: 11, 13, 15, 17.

Решение. Нужно найти $x + y$, если $3x + 5y = 53$, x, y — целые неотрицательные числа. Оно из решений — пара (1; 10). Значит, общее решение уравнения $(1 + 5t; 10 - 3t)$, t — целое число. Необходимо выполнение условий $1 + 5t \geq 0$, $10 - 3t \geq 0$, откуда $0 \leq t \leq 3$. Получаем, что $x + y = (1 + 5t) + (10 - 3t) = 11 + 2t$, что при указанных значениях равно 11, 13, 15 и 17.

10. Для какого наименьшего натурального числа n найдутся целые числа x и y, для которых выполнено $n = 91x + 221y$?

Ответ: 13.

Решение. Заметим, что НОД (91; 221) = 13. Значит, при любых целых числах x и y, $n = 91x + 221y$ кратно 13. Поэтому, n не менее 13. При $x = 5, y = -2$ получаем $n = 13$.

Комментарий. Так как 91 : 13 = 7, 221 : 13 = 17, то чтобы получить $n = 13$ нужно найти хотя бы одно решение уравнения $7x + 17y = 1$ в целых числах. Верен факт, что если НОД$(a; b) = 1$, то уравнение $ax + by = 1$ обязательно имеет решение в целых числах.

11. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 119 × 187. На сколько частей диагональ прямоугольника делится границами клеток?

Ответ: 289.

Решение. Диагональ пересекает на клетчатой бумаге 118 горизонтальных линий и 186 вертикальных. Согласно результату решения задачи № 8, на диагонали лежит 16 вершин клеток — в них пересечения с двумя линиями сливаются в одно. Значит, диагональ делится на части 118 + 186 – 16 = 288 раз и получается 289 частей.

12. В салоне сотовой связи Лена и Витя соревновались в продаже чехлов для телефона. В первую неделю Витя продал чехлов на 30 % больше, чем Лена. Во вторую неделю Витя продала чехлов на 30 % меньше, чем Лена. При этом всего за две недели Витя продал чехлов на 10 % больше, чем Лена. Сколько минимальное количество чехлов могли продать они оба при этих условиях?

Ответ: 63.

Решение. Пусть в первую неделю Витя продал $13a$ чехлов, Лена — $10a$ чехлов, во вторую Витя продал $7b$ чехлов, Лена — $10b$ чехлов. Из условия следует, что $13a + 7b = 1{,}1(10a + 10b)$, $13a + 7b = 11a + 11b$, $a = 2b$. Минимальные значения переменных $a = 2$, $b = 1$. Всего продано $23a + 17b$ чехлов, минимальное значение равно $23 \cdot 2 + 17 = 63$.

13. Валентина Петровна купила активированного угля в аптеке. При себе у нее было 100 руб. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась: перепутала местами число копеек и рублей. Получая сдачу, Валентина Петровна уронила 2 руб. 10 коп. и обнаружила, что у нее осталось в 2 раза больше, чем ей должны были сдать. На какую сумму (в копейках) Валентина Петровна купила активированного угля?

Ответ: 71 руб. 41 коп.

Решение. Пусть сдача с покупки составляла x руб. y коп., x, y — неотрицательные целые числа, меньшие 100. Тогда $2(100x + y) + 210 = 100y + x$, откуда получаем $98y - 199x = 210$. Так как НОД (98; 210) = 14, то $199x$ кратно 14. Так как НОД (199; 14) = 1, то x кратно 14. Достаточно рассмотреть значения x, равные 0, 14, 28, 42, 56, 70, 84 и 98. Целое значение $y = 59$ получается только при $x = 28$. Значит, сдача составляла 28 руб. 59 коп., а покупка стоила 71 руб. 41 коп.

14. На острове Рыцарей и Лжецов 100 жителей. Однажды один из них сказал «Среди нас ровно один рыцарь», второй — «Количество рыцарей среди нас делится на 1», третий — «Среди нас ровно два рыцаря», четвертый — «Количество рыцарей делится на 2», …, 99-ый — «Среди нас ровно 50 рыцарей», 100-ый — «Количество рыцарей делится на 50». Сколько среди них могло быть рыцарей?

Ответ: 3 или 4.

Решение. Хотя бы один рыцарь есть (второй сказал правду). Среди фраз «среди нас ровно n рыцарей», не более одной верной.

Пусть рыцарей N. Заметим, что любой собственный делитель числа N не превосходит $N/2$. Значит, у числа N количество делителей не превосходит $N/2 + 1$, то есть правдивых фраз не более $N/2 + 2$. Количество правдивых фраз совпадает с числом N. Значит, $N/2 + 2 > N$, откуда $N \le 4$.

Одного рыцаря быть не может, поскольку первые два утверждения будут истины. Двух рыцарей быть не может, поскольку утверждения 2, 3 и 4 будут истины. Три рыцаря могут быть, верны утверждения 2, 5, 6. Четыре рыцаря могут быть, верны утверждения 2, 4, 7, 8.

15. На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $97/(3m + 8n)$ является натуральным числом?

Ответ: 3.

Решение. Число 97 — простое, $3m + 8n > 1$, поэтому $3m + 8n = 97$.

Пусть $m \ge n$. Запишем соотношение как $3(m - n) + 11n = 97$.
Тогда $3(m - n) \ge 97 - 88 = 9$, $m - n \ge 3$.
При этом $m - n = 3$ при $n = 8$, $m = 11$.

Пусть $m < n$. Запишем соотношение как $11m + 8(n - m) = 97$.
Достаточно проверить, что оно не имеет решений при $n - m$ равном 0, 1 или 2.

16. Оля нарисовала график функции $y = (7x + 5) : 9$ на промежутке, где x от 1 до 1000. Какое количество точек, обе координату которых целые, лежат на этом куске графика?

Ответ: 111.

Решение. Нужно число решений уравнения $-7x + 9y = 5$, где x, y — целые числа, $1 \le x \le 1000$. Оно из решений — пара (7; 6). Значит, общее решение уравнения $(7 + 9t; 6 + 7t)$, t — целое число. Если $1 \le 7 + 9t \le 1000$, то $0 \le t \le 110$ — всего 111 значения t, которые соответствуют 111 точкам на графике.