



Блок 3. Признаки делимости

Подготовительное занятие

- Найдите цифру a , если число $\overline{123a56}$ делится на 8.
 - Какой цифрой надо заменить звёздочку в записи числа $123*567$, чтобы оно (а) делилось на 3, (б) делилось на 9, (в) при делении на 9 давало остаток 7?
 - Часто пользуются упрощенным признаком делимости на 11: «Натуральное число кратно 11, если сумма цифр, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на чётных местах». Это верное утверждение, но не любое число, кратное 11, можно определить по этому признаку.
(а) Укажите натуральное число, кратное 11, которое не подходит под этот признак.
(б) Найдите наименьшее такое число.
1. Найдите наименьшее число, кратное 45, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.
 2. Какие остатки дает число $10\dots 0$ при делении на 11 если у него (а) четное число нулей, (б) нечетное число нулей?
 3. Запишите несколько раз подряд число 2019 так, чтобы получившееся число делилось (а) на 9, (б) на 11.
 4. Сколько шестёрок может быть в конце записи квадрата натурального числа?
 5. Вычислили сумму цифр числа $2020!$, равного произведению всех натуральных чисел от 1 до 200. У полученного числа снова вычислили сумму его цифр, и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число.
 6. (а) Верно ли, что число $22\dots 22$ (всего 27 двоек) делится на 27?
(б) Докажите, что не верен признак делимости на 27, аналогичный признакам делимости на 3 и 9.
(в) Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр, кратной 27, которое не делится на 27.
 7. Существует ли число, сумма цифр которого равна 11, которое оканчивается цифрами 11 и делится на 11?
 8. В клетках таблицы 5×5 стоят ненулевые цифры. Для каждой строки рассмотрим число, составленное из цифр этой строки в порядке из следования слева направо. Для каждого столбца рассмотрим число, составленное из цифр этого столбца в порядке из следования сверху вниз. Получили десять пятизначных чисел. Может ли оказаться, что из всех этих чисел ровно одно не делится (а) на 3, (б) на 11?
 9. Пусть A, B — два различных семизначных числа, каждое из которых составлено из всех цифр от 1 до 7. Докажите, что A не делится на B .



Блок 3. Признаки делимости

Подготовительное занятие

- Найдите цифру a , если число $\overline{123a56}$ делится на 8.
 - Какой цифрой надо заменить звёздочку в записи числа $123*567$, чтобы оно (а) делилось на 3, (б) делилось на 9, (в) при делении на 9 давало остаток 7?
 - Часто пользуются упрощенным признаком делимости на 11: «Натуральное число кратно 11, если сумма цифр, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на чётных местах». Это верное утверждение, но не любое число, кратное 11, можно определить по этому признаку.
(а) Укажите натуральное число, кратное 11, которое не подходит под этот признак.
(б) Найдите наименьшее такое число.
1. Найдите наименьшее число, кратное 45, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.
 2. Какие остатки дает число $10\dots 0$ при делении на 11 если у него (а) четное число нулей, (б) нечетное число нулей?
 3. Запишите несколько раз подряд число 2019 так, чтобы получившееся число делилось (а) на 9, (б) на 11.
 4. Сколько шестёрок может быть в конце записи квадрата натурального числа?
 5. Вычислили сумму цифр числа $2020!$, равного произведению всех натуральных чисел от 1 до 200. У полученного числа снова вычислили сумму его цифр, и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число.
 6. (а) Верно ли, что число $22\dots 22$ (всего 27 двоек) делится на 27?
(б) Докажите, что не верен признак делимости на 27, аналогичный признакам делимости на 3 и 9.
(в) Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр, кратной 27, которое не делится на 27.
 7. Существует ли число, сумма цифр которого равна 11, которое оканчивается цифрами 11 и делится на 11?
 8. В клетках таблицы 5×5 стоят ненулевые цифры. Для каждой строки рассмотрим число, составленное из цифр этой строки в порядке из следования слева направо. Для каждого столбца рассмотрим число, составленное из цифр этого столбца в порядке из следования сверху вниз. Получили десять пятизначных чисел. Может ли оказаться, что из всех этих чисел ровно одно не делится (а) на 3, (б) на 11?
 9. Пусть A, B — два различных семизначных числа, каждое из которых составлено из всех цифр от 1 до 7. Докажите, что A не делится на B .

Блок 3. Признаки делимости

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

В начале занятия рекомендуем вспомнить признаки делимости, обсудить его использование, обобщить до принципа равноостаточности.

В случае недостатка времени, можно до интернет-карусели рассмотреть без доказательств сами факты (признаки делимости и принципы равноостаточности) и соотношения между ними, а также обсудить предложенные задачи. После соревнования можно посвятить доказательствам отдельное занятие.

- Будем применять стандартные обозначения: k -значное натуральное число записывать как $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0}$ ($a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$ — цифры, $a_{k-1} \neq 0$). Также если a, b — два натуральных числа, то \overline{ab} — натуральное число, запись которого получается последовательной записью чисел a, b друг за другом. Например, если $a = 12, b = 34$, то $\overline{ab} = 1234$.

- **Признаки делимости.** Не трудно вспомнить стандартные признаки делимости на 2 и на 5, на 4 и на 25, на 8 и на 125. Например, признак делимости на 4 (или 25) звучит так: «Если число, образованное двумя последними цифрами натурального числа кратно 4 (или 25), то само натуральное число кратно 4 (или 25)». Доказательство этого факта не сложно: если $n = \overline{aa_1a_0}$ (где a — запись некоторого натурального числа, a_1, a_0 — цифры), то $n = 100a + \overline{a_1a_0}$; так как $100a$ кратно 4 (или 25), то из делимости на 4 (или 25) числа $\overline{a_1a_0}$ следует делимость на 4 (или 25) числа n .

Аналогично строятся доказательства признаков делимости на 2 и на 5, на 8 и на 125 (надо выделить число, образованное тремя последними цифрами), а также на любые степени чисел 2 и 5.

- Найдите цифру a , если число $\overline{123a56}$ делится на 8.

Ответ: 0, 2, 4, 6 или 8.

Решение. Согласно *свойству* числа, кратного 8, число $\overline{a56}$ должно делиться на 8. Так как 56 кратно 8, то $\overline{a00} = 100a$ должно делиться на 8, что выполнено при любой чётной цифре a .

- Сделаем два важных замечания.

(1) Обычно, указанная закономерность используется не только как *признак* (из чего-то следует делимость числа), но и как *свойство* числа (если число кратно, то что-то известно про его цифры).

(2) Из приведенного выше доказательства следует более общий факт, который будем называть *принципом равноостаточности*: «Любое натуральное число и число, образованное его двумя последними цифрами, дают равные остатки при делении

на 4 (или на 25)». Действительно, разность $n - \overline{a_1a_0} = 100a$ кратна 4 (или 25), поэтому n и $\overline{a_1a_0}$ дают равные остатки при делении на 4 (или на 25).

- Аналогично формулируются факты о делимости на 9 (или на 3).

Принцип равноостаточности при делении на 9 (или на 3): «Любое натуральное число и сумма его цифр дают равные остатки при делении на 9 (или на 3)».

Обозначим сумму цифр натурального числа n как $s(n)$. Любое натуральное число можно представить в виде суммы числа, кратного 9 (или 3), и суммы его цифр:

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_{k-1}\dots a_2a_1a_0} = 10^{k-1}a_{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0 = \\ &= \left((10^{k-1} - 1)a_{k-1} + a_{k-1} \right) + \dots + (9a_1 + a_1) + a_0 = \\ &= \underbrace{99\dots 99}_{k-1 \text{ цифр}} \cdot a_{k-1} + \dots + 9a_1 + s(n) = 9m + s(n). \end{aligned}$$

Значит, число n и сумма его цифр $s(n)$ дают одинаковые остатки при делении на 9 (или на 3).

- Какой цифрой надо заменить звёздочку в записи числа $123*567$, чтобы оно (а) делилось на 3, (б) делилось на 9, (в) при делении на 9 давало остаток 7?

Ответ (а) 0, 3, 6 или 9, (б) 3, (в) 1.

Решение. Сумма данных шести цифр равна 24, она кратна 3. Для делимости на 3 звёздочку надо заменить цифрой, кратной 3, то есть 0, 3, 6 или 9. Для делимости на 9 нужно сделать сумму цифр 27, звёздочку надо заменить цифрой 3. Чтобы число давало остаток 7 при делении на 9, нужно сделать из суммы $24 = 2 \cdot 9 + 6$ сумму $2 \cdot 9 + 7$, звёздочку надо заменить цифрой 1.

- Сложнее формулировка фактов о делимости на 11. Рассмотрим 2 факта.

Принцип № 1 равноостаточности при делении на 11: «Любое натуральное число и сумма чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц), дают равные остатки при делении на 11». Например, один и тот же остаток при делении на 11 дают число 103785 и сумма $10 + 37 + 85$, число 12345 и сумма $1 + 23 + 45$.

Действительно, можно провести рассуждения, аналогичные с делимостью на 9:

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_{k-1}\dots a_2a_1a_0} = \dots + 10^4\overline{a_5a_4} + 100\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} = \\ &= (\dots + 9999\overline{a_5a_4} + 99\overline{a_3a_2}) + (\dots + \overline{a_5a_4} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}). \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что первая скобка кратна 11, так как любое число, составленное из чётного числа одинаковых цифр, кратно 11.

Принцип № 2 равноостаточности при делении на 11: «Любое натуральное число и разность сумм цифр, стоящих на нечётных местах (1-я, 3-я, ... с конца) и на чётных

местах (2-я, 4-я, ... с конца), дают равные остатки при делении на 11». Например, один и тот же остаток при делении на 11 дают число 54321 и разность $(1 + 3 + 5) - (2 + 4)$.

Чтобы превратить принцип № 1 в принцип № 2 достаточно заметить, что в сумме чисел, образующих группы по две цифры (начиная с единиц), каждое слагаемое можно заменить разностью второй и первой цифр. Действительно, из тождества $\overline{ab} = 11a + (-a + b)$ следует, что \overline{ab} и $(-a + b)$ дают равные остатки при делении на 11.

- Часто пользуются упрощенным признаком делимости на 11: «Натуральное число кратно 11, если сумма цифр, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на чётных местах». Это верное утверждение, но не любое число, кратное 11, можно определить по этому признаку.

(а) Укажите натуральное число, кратное 11, которое не подходит под этот признак.

(б) Найдите наименьшее такое число.

(б) Ответ: 209.

Решение. Все двузначные числа удовлетворяют признаку. Если трёхзначное число \overline{abc} кратно 11, то $a - b + c$ делится на 11. Нужно, чтобы $a - b + c \neq 0$, иначе сработает упрощенный признак. Очевидно, $-8 \leq a - b + c \leq 18$, поэтому нужно искать такие цифры, что $a - b + c = 11$. Тогда $a + c \geq 11$, откуда $a \geq 2$. Если $a = 2$, то $b = 0, c = 9$, искомое наименьшее число 209.

Задачи для самостоятельного решения.

- Найдите наименьшее число, кратное 45, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.

Ответ: 111111110.

Решение. Число кратно 45, если оно кратно каждому из двух взаимно простых чисел: 9 и 5. Так как искомое число делится на 9, то его сумма цифр должна делиться на 9. Следовательно, количество единиц в искомом числе кратно девяти. Число, кратное пяти, может оканчиваться на 0 или на 5, но второй случай невозможен по условию. Таким образом, искомое число должно содержать 9 единиц и оканчиваться нулем.

- Какие остатки даёт число $10 \dots 0$ при делении на 11 если у него (а) четное число нулей, (б) нечетное число нулей?

Ответ: (а) 1, (б) 10.

Решение. По принципу № 1 равноостаточности при делении на 11, первое число даёт такой же остаток, как и $1 + 0 + \dots + 0 = 1$, второе — как $10 + 0 + \dots + 0 = 10$.

- Запишите несколько раз подряд число 2019 так, чтобы получившееся число делилось (а) на 9, (б) на 11.

(а) Решение. Достаточно число 2019 записать 3 раза подряд. Тогда сумма цифр будет равна $12 \cdot 3 = 36$, что делится на 9.

(б) Решение. Достаточно число 2019 записать 11 раз подряд. Тогда разность между суммами цифр на нечётных и чётных местах будет равна 66, что делится на 11.

- Сколько шестёрок может быть в конце записи квадрата натурального числа?

(а) Ответ: 0 или 1.

Решение. Бывают квадраты целых чисел без цифр «6» в конце или только с одной такой цифрой. Например, 25 и 36.

Если квадрат целого числа оканчивается на ...66, то он делится на 2 (по свойству делимости на 2), но не делится на 4 (по свойству делимости на 4), что невозможно.

- Вычислили сумму цифр числа $2020!$, равного произведению всех натуральных чисел от 1 до 2020. У полученного числа снова вычислили сумму его цифр, и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число.

Ответ: 9.

Решение. Число $2020!$ кратно 9, поэтому его сумма цифр делится на 9. Тогда и сумма цифр полученного числа также кратна 9, и так далее. Будут получаться только числа, делящиеся на 9. Значит, может получиться однозначное число 0 или 9. Остаётся заметить, что число 0 получиться не может, так как сумма цифр любого натурального числа больше нуля.

- (а) Верно ли, что число $22 \dots 22$ (всего 27 двоек) делится на 27?

(б) Докажите, что не верен признак делимости на 27, аналогичный признакам делимости на 3 и 9.

(в) Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр, кратной 27, которое не делится на 27.

Указание. Обратите внимание, что если число делится на 3 и на 9, то не обязательно делится на $3 \cdot 9 = 27$ (контрпример — число 9).

(а) Ответ: верно.

Решение. Разложим данное число на три множителя следующим образом:

$$\underbrace{22 \dots 22}_{27 \text{ штук}} = 2 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{27 \text{ штук}} = 2 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{9 \text{ штук}} \cdot \underbrace{1 \underbrace{00 \dots 00}_{8 \text{ штук}} \underbrace{00 \dots 00}_{8 \text{ штук}}}_{1}$$

По признаку делимости 2-ой множитель кратен 9, 3-ий множитель кратен 3. Значит, данное число делится на $3 \cdot 9 = 27$.

(б) Решение. Доказать, что признак не верен, можно указав противоречащий пример. Это можно сделать, например, так: числа 9945 и 9954 имеют сумму цифр 27, отличаются на 9, значит, одно из них не кратно 27.

(в) Ответ: 1899.

Решение. Есть только одно число до 1000, которое имеет сумму цифр 27 — это число 999, оно кратно 27. Следующее по величине число с суммой цифр 27 — это 1899, оно не кратно 27.

7. Существует ли число, сумма цифр которого равна 11, которое оканчивается цифрами 11 и делится на 11?

Ответ: не существует.

Решение. Рассмотрим суммы цифр на нечётных и чётных местах такого числа. Разность между суммами не может быть равна 0, так как сумма всех цифр нечётна. Каждая сумма не менее 1, так как число оканчивается на ...11. Значит, максимальная (по модулю) разность равна $10 - 1 = 9$. Вывод: разность не может быть кратна 11, то есть само число не может делиться на 11.

8. В клетках таблицы 5×5 стоят ненулевые цифры. Для каждой строки рассмотрим число, составленное из цифр этой строки в порядке из следования слева направо. Для каждого столбца рассмотрим число, составленное из цифр этого столбца в порядке из следования сверху вниз. Получили десять пятизначных чисел. Может ли оказаться, что из всех этих чисел ровно одно не делится (а) на 3, (б) на 11?

Ответ: (а) не может, (б) не может.

Решение. Можно предположить, что единственное число, не кратное (а) 3, (б) 11 получено из цифр одного из столбцов.

(а) Если в строках получены числа, кратные 3, то сумма всех цифр в таблице кратна 3. Если в четырёх столбцах получены числа, кратные 3, то сумма всех цифр в них кратна 3. Значит, кратна 3 и сумма цифр в последнем столбце. Значит, последнее число также кратно 3.

(б) Раскрасим клетки таблицы в чёрный и белый цвет в шахматном порядке, *результатом* в строке, в столбце или во всей таблице назовём разность между суммами цифр в черных и белых клетках.

Если в строках получены числа, кратные 11, то *результат* в каждой строке кратен 11, а значит, и *результат* всей таблицы кратен 11.

Если в четырёх столбцах получены числа, кратные 11, то *результаты* в них кратны 11. Значит, кратен 11 и *результат* в последнем столбце. Значит, последнее число также кратно 11.

9. Пусть A, B — два различных семизначных числа, каждое из которых составлено из всех цифр от 1 до 7. Докажите, что A не делится на B .

Решение. По принципу равноостаточности, каждое из этих чисел при делении на 9 даёт тот же остаток, что и сумма $1 + 2 + \dots + 7 = 28$, то есть остаток 1. Если $A = kB$, то $2 \leq k \leq 7$. Но тогда если B даёт остаток 1, то $A = kB$ даёт остаток $k \neq 1$. Противоречие.