

Блок 4. Квадратные уравнения

Задачи интернет-карусели (2020)

- Числа a, b — корни уравнения $x(x + 1) = 2019 \cdot 2020$, $a < b$. Найдите $a + 2b$.
- Зал в квартире Вовочки имеет форму прямоугольника. Его площадь равна $61,2$ кв. м, а периметр зала равен $31,4$ м. Сколько метров составляет длина большей из стен зала?
- В классе дети играли между собой в онлайн шахматы. Половина детей сыграла по одному разу со всеми одноклассниками, а вторая половина — по одному разу только с 19 своими одноклассниками. Всего было проведено 286 игр. Сколько детей в этом классе?
- Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - x - 999000 = 0$?
- Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - 37x - 39 = 0$?
- На доске написаны 11 положительных чисел. Каждое из них равно квадрату суммы всех остальных чисел. Чему равна сумма всех чисел на доске?
- Число $x = 2$ — корень уравнения $x^2 - 12x + a = 0$. Чему равно a ?
- Кухня в квартире Вовочки имеет форму прямоугольника. Он знает, что её площадь равна $26,4$ кв. м. Он прошел от одного угла до другого по диагонали с рулеткой и выяснил, что диагональ кухни равна $7,3$ м. Сколько метров составляет периметр кухни?
- У Васи было 2 квадрата: желтый и красный. Желтый больше красного. Он разрезал их на несколько частей, а потом сложил из всех частей (без дырок и перекрытий) прямоугольник. Одна из сторон прямоугольника была в $2,6$ раза больше, чем у желтого квадрата, а соседняя с ней сторона — в 2 раза больше, чем у красного квадрата. Во сколько раз площадь желтого квадрата больше площади красного квадрата?
- Число
$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
 является корнем уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где b, c — целые числа. Найдите значение $b + 20c$.
- Васенька нашёл все корни уравнений
$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$2x^2 + 11x + 14 = 0,$$

$$2x^2 - x - 28 = 0,$$

$$3x^2 + 11x - 4 = 0,$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0.$$

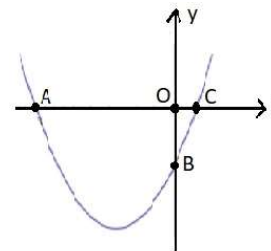
Сколько различных чисел у него получилось?

- Квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ имеет 2 действительных корня. Когда его первые два коэффициента увеличили на 1 , а третий — уменьшили на 2 , оказалось, что оба корня увеличились на 1 . Чему равно $b + 2c$?
- Мария Ивановна сочиняла задания для своих учеников на тему дробно-рациональные уравнения. Она подобрала такое число a , что уравнение

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} = \frac{4}{3a}$$

одним из корней имеет число 1 . Какое число является вторым корнем этого уравнения?

- Васенька решил квадратное уравнение $2x^2 - 2ax + a = 0$, где a — некоторое число. Оно имеет два различных корня x_1 и x_2 . Чему равно значение выражения $1/x_1 + 1/x_2$?
- Вася нарисовал 10 парабол: $y = x^2 + x + 2$, $y = x^2 + 2x + 3$, $y = x^2 + 3x + 4$, ..., $y = x^2 + 9x + 10$, $y = x^2 + 10x + 1$. Сколько точек пересечения этих парабол?
- При каком a корни уравнения $x^2 + 2020x + a = 0$ совпадают?
- Велосипедист Сережа доехал с постоянной скоростью из своей квартиры в деревенский домик, расстояние между которыми равно 180 км, за целое число часов. Обрато он ехал со скоростью на 7 км/ч больше, но делал 10 -минутный перерыв после каждых 50 минут пути. Путь обратно занял на 1 час 10 мин меньше. Сколько часов у Сережи часов занял путь от дома до деревни?
- На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$.



Известно, что $AO = 2OB$. Чему равно OC ?

Блок 4. Квадратные уравнения

Задачи интернет-карусели (2020). Указания и решения

1. Числа a, b — корни уравнения $x(x + 1) = 2019 \cdot 2020$, $a < b$. Найдите $a + 2b$.

Ответ: 2018.

Указание: $a = -2020, b = 2019, a + 2b = 2018$.

Решение. В данном уравнении не сложно угадать корни: $a = -2020, b = 2019$. Иных корней нет, так как квадратное уравнение имеет не более двух корней. Искомое значение равно $a + 2b = 2018$.

2. Зал в квартире Вовочки имеет форму прямоугольника. Его площадь равна 61,2 кв. м, а периметр зала равен 31,4 м. Сколько метров составляет длина большей из стен зала?

Ответ: 8,5.

Указание: размеры зала 7,2 м \times 8,5 м.

Решение. Если одна сторона зала равна x м, то другая — $(31,4:2 - x) = 15,7 - x$. Площадь равна $x(15,7 - x) = 61,2$. Корни этого уравнения равны 7,2 и 8,5. Большая сторона равна 8,5 м.

3. В классе дети играли между собой в онлайн шахматы. Половина детей сыграла по одному разу со всеми одноклассниками, а вторая половина — по одному разу только с 19 своими одноклассниками. Всего было проведено 286 игр. Сколько детей в этом классе?

Ответ: 26.

Решение. Пусть в классе $2n$ учеников. Они участвовали $n(2n - 1) + 19n$ раз в шахматных партиях. Это число равно удвоенному числу игр, то есть $286 \cdot 2$. Получаем уравнение $n(2n - 1) + 19n = 286 \cdot 2$ или $n^2 + 9n - 286 = 0$. Корни полученного уравнения 13 и -22. Получаем $n = 13, 2n = 26$.

4. Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - x - 999000 = 0$?

Ответ: 1998.

Указание: корни — числа 1000 и -999.

Решение. Корни данного уравнения нетрудно подобрать, воспользовавшись обратной теоремой Виета: числа $x_1 = -999, x_2 = 1000$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -999000$, значит, они — корни данного уравнения.

Между числами -999 и 1000 находится 998 отрицательных целых, 999 положительных чисел и число 0. Итого $998 + 999 + 1 = 1998$ чисел.

Комментарий. Верный ответ дали 105 команд, ответ «1997» — 16 команд, ответ «1999» — 26 команд, ответ «2000» — 21 команда.

5. Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - 37x - 39 = 0$?

Ответ: 40.

Решение. Согласно формулам, корни уравнения равны

$$\frac{37 - 5\sqrt{61}}{2} \text{ и } \frac{37 + 5\sqrt{61}}{2}.$$

Приближенное вычисление на калькуляторе показывает, что корни примерно равны -1,026 и 38,026.

Оценить значения корней можно без калькулятора. Не трудно проверить, что $7,8^2 < 61 < 8^2$, откуда $7,8 < \sqrt{61} < 8$. Получаем:

$$-2 < -1,5 = \frac{37 - 5 \cdot 8}{2} < \frac{37 - 5\sqrt{61}}{2} < \frac{37 - 5 \cdot 7,8}{2} = -1,$$

$$38 = \frac{37 + 5 \cdot 7,8}{2} < \frac{37 + 5\sqrt{61}}{2} < \frac{37 + 5 \cdot 8}{2} = 38,5 < 39.$$

Значит, первый корень находится в интервале $(-2; -1)$, второй — $(38; 39)$.

Между такими корнями 1 отрицательное целое число, число 0 и 38 положительных целых чисел. Всего $1 + 1 + 38 = 40$.

Комментарий. Верный ответ дали 125 команд, ответ «38» — 22 команды, ответ «39» — 22 команды.

6. На доске написаны 11 положительных чисел. Каждое из них равно квадрату суммы всех остальных чисел. Чему равна сумма всех чисел на доске?

Ответ: 0,11.

Указание: на доске записаны числа $1/100$.

Решение. Докажем, что все числа одинаковы. Предположим, что число, записанное на одной из карточек, больше числа, записанного на другой. Отложим карточку с большим числом в сторону. По условию это число равно квадрату суммы остальных чисел. Поменяем местами карточки с большим и меньшим числами. Тогда отложенное число уменьшилось, а сумма всех остальных чисел (а значит, и её квадрат) увеличилась, и равенство уже выполняться не может.

Если все числа равны x , то $x = 100x^2$, откуда $x = 0,01$. Сумма всех чисел равна $11 \cdot 0,01 = 0,11$.

7. Число $x = 2$ — корень уравнения $x^2 - 12x + a = 0$. Чему равно a ?

Ответ: 20.

Решение 1. Так как число 2 — корень, то $2^2 - 12 \cdot 2 + a = 0$, откуда $a = 20$.

Решение 2. По теореме Виета сумма корней равна 12, поэтому второй корень равен $12 - 2 = 10$. Свободный член равен произведению корней, то есть $2 \cdot 10 = 20$.

8. Кухня в квартире Вовочки имеет форму прямоугольника. Он знает, что её площадь равна 26,4 кв. м. Он прошел от одного угла до другого по диагонали с рулеткой и выяснил, что диагональ кухни равна 7,3 м. Сколько метров составляет периметр кухни?

Ответ: 20,6.

Указание: размеры кухни 5,5 м \times 4,8 м.

Решение. Площадь равна 26,4 кв. м, поэтому если длина одной стороны равна x м, то вторая равна $26,4/x$ м. Согласно теореме Пифагора, получаем

$$x^2 + \left(\frac{26,4}{x}\right)^2 = 7,3^2.$$

Сделав замену $t = x^2$ и преобразовав, получаем $t^2 - 53,29t + 696,96 = 0$. Корни этого уравнения: $30,25 = 5,5^2$ и $23,04 = 4,8^2$. Тогда значение x равно 5,5 или 4,8 — это длины сторон. Периметр равен $(5,5 + 4,8) \cdot 2 = 20,6$.

9. У Васи было 2 квадрата: желтый и красный. Желтый больше красного. Он разрезал их на несколько частей, а потом сложил из всех частей (без дырок и перекрытий) прямоугольник. Одна из сторон прямоугольника была в 2,6 раза больше, чем у желтого квадрата, а соседняя с ней сторона — в 2 раза больше, чем у красного квадрата. Во сколько раз площадь желтого квадрата больше площади красного квадрата?

Ответ: 25.

Решение. Пусть сторона желтого равна x , сторона синего — y . Тогда стороны прямоугольника $2,6x$ и $2y$. Площадь прямоугольника равна $x^2 + y^2 = 2,6x \cdot 2y$.

Поделив соотношение на y^2 и заменив $t = x/y$, получаем $t^2 - 5,2t + 1 = 0$. Корни равны 0,2 и 5. По условию желтый квадрат больше синего, поэтому подходит 5. Если отношение сторон квадратов равно 5, то отношение их площадей равно $5^2 = 25$.

10. Число

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

является корнем уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где b, c — целые числа.

Найдите значение $b + 20c$.

Ответ: 10.

Указание: подходит только уравнение $x^2 - 10x + 1 = 0$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Тогда } (5 - 2\sqrt{6})^2 + b(5 - 2\sqrt{6}) + c = (49 + 5b + c) - (20 + 2b)\sqrt{6} = 0.$$

Если $20 + 2b \neq 0$, то слева будет иррациональное число, а справа — целое, что невозможно. Значит, $20 + 2b = 0$, откуда и $49 + 5b + c = 0$. Тогда $b = -10, c = 1, b + 20c = 10$.

11. Васенька нашёл все корни уравнений

$$\begin{aligned}x^2 + x - 2 &= 0, \\2x^2 + 11x + 14 &= 0, \\2x^2 - x - 28 &= 0, \\3x^2 + 11x - 4 &= 0, \\3x^2 - 13x + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Сколько различных чисел у него получилось?

Ответ: 6.

Указание. Корни первого уравнения — числа -2 и 1 , второго — числа $-3,5$ и -2 , третьего — числа $-3,5$ и 4 , четвертого — числа -4 и $1/3$, пятого — числа $1/3$ и 4 . Итого 6 различных чисел: $-4, -3,5, -2, 1, 1/3$ и 4 .

12. Квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ имеет 2 действительных корня. Когда его первые два коэффициента увеличили на 1, а третий — уменьшили на 2, оказалось, что оба корня увеличились на 1. Чему равно $b + 2c$?

Ответ: 17.

Указание: $a = 5, b = 6$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни трехчлена $x^2 + bx + c$. По условию числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ — корни трехчлена $2x^2 + (b + 1)x + (c - 2)$.

Из теоремы Виета имеем: $x_1 + x_2 = -b$ и $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -(b + 1)/2$. Отсюда $-b = -(b + 1)/2 - 2$, находим $b = 5$.

Из теоремы Виета имеем: $x_1 x_2 = c$ и $(c - 2)/2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$. Тогда получаем $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = c - b + 1 = c - 5 + 1 = c - 4$, откуда $c = 6$.

Тогда $b + 2c = 17$.

13. Мария Ивановна сочиняла задания для своих учеников на тему дробно-рациональные уравнения. Она подобрала такое число a , что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{4}{3a}$$

одним из корней имеет число 1. Какое число является вторым корнем этого уравнения?

Ответ: -4 и 0,25.

Решение. Найдем значение a , подставив $x = 1$:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} = \frac{4}{3a} \Leftrightarrow \frac{2}{1-a^2} - \frac{4}{3a} = 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2 + 6a - 4}{3a(1-a^2)} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0,$$

откуда a равно -2 или 0,5.

При $a = -2$ имеем уравнение

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = -\frac{4}{6} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0,$$

корни которого -4 и 1.

При $a = 0,5$ мы придём к уравнению

$$\frac{1}{x-0,5} + \frac{1}{x+0,5} = \frac{4}{1,5} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0,$$

корни которого 0,25 и 1.

Значит, вторым корнем может быть -4 или 0,25.

14. Васенька решил квадратное уравнение $2x^2 - 2ax + a = 0$, где a — некоторое число. Оно имеет два различных корня x_1 и x_2 .

Чему равно значение выражения $1/x_1 + 1/x_2$?

Ответ: 2.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = a/2$. Тогда получаем

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{a}{a/2} = 2.$$

15. Вася нарисовал 10 парабол: $y = x^2 + x + 2$, $y = x^2 + 2x + 3$, $y = x^2 + 3x + 4$, ..., $y = x^2 + 9x + 10$, $y = x^2 + 10x + 1$. Сколько точек пересечения этих парабол?

Ответ: 10.

Решение. Любые две данные параболы пересекаются в одной точке. Действительно, абсцисса точки пересечения любых двух парабол $y = x^2 + ax + u$ и $y = x^2 + bx + v$, $a \neq b$, — корень уравнения $x^2 + ax + u = x^2 + bx + v$, которое эквивалентно соотношению $(a - b)x = v - u$, при $a \neq b$ имеет только одно значение x .

Первые девять парабол проходят через точку $(-1; 2)$. Действительно, они имеют вид $y = x^2 + kx + (k + 1)$. При $x = -1$ имеем $y = 1 - k + k + 1 = 2$.

Заметим, десятая парабола $y = x^2 + 10x + 1$ через точку $(-1; 2)$ не проходит. Значит, она пересекает остальные 9 парабол в 9 различных точках.

Значит, всего 10 точек пересечения.

16. При каком a корни уравнения $x^2 + 2020x + a = 0$ совпадают?

Ответ: 1020100.

Решение. Корни совпадают, если $D = 2020^2 - 4a = 0$, $a = 1020100$.

Комментарий. Корни совпадают, если $x^2 + 2 \cdot 1010x + a$ — полный квадрат. Это возможно, когда $a = 1010^2$.

17. Велосипедист Сережа доехал с постоянной скоростью из своей квартиры в деревенский домик, расстояние между которыми равно 180 км, за целое число часов. Обратно он ехал со скоростью на 7 км/ч больше, но делал 10-минутный перерыв после каждых 50 минут пути. Путь обратно занял на 1 час 10 мин меньше. Сколько часов у Сережи часов занял путь от дома до деревни?

Ответ: 9.

Решение. Пусть к деревне он ехал со скоростью v км/ч целое число часов, равное $n = 180/v$.

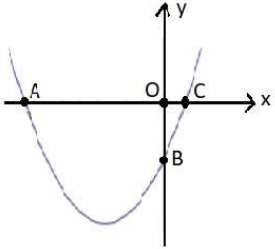
Обратно он ехал со скоростью $(v + 7)$ км/ч на 1 час 10 мин меньше, то есть $n - 2$ часов и 50 минут. Он делал 10-минутный перерыв после каждых 50 минут пути. Значит, он проехал $n - 1$ раз по 50 минут и проехал $(n - 1)(v + 7) \cdot 5/6$ км. Получаем уравнение

$$\left(\frac{180}{v} - 1\right)(v + 7) \cdot \frac{5}{6} = 180 \Leftrightarrow (180 - v)(v + 7) = 1,2 \cdot 180v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 43v - 180 \cdot 7 = 0.$$

Корни этого уравнения 20 и -63 . Значит, $v = 20$ км/ч, на путь «туда» потрачено $180 : 20 = 9$ часов.

18. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$.



Известно, что $AO = 2OB$. Чему равно OC ?

Ответ: 0,5.

Решение. Ордината точки B — значение функции при $x = 0$. Поэтому длина OB равна $-b$. Тогда длина AO равна $-2b$. Абсцисса точки A — значение переменной, при котором функция принимает значение 0. По теореме Виета число x , абсцисса точки C , должно быть таким, что $2b \cdot x = b$, откуда $x = 1/2$. Значит, $OC = 0,5$.