

Блок 1. Геометрия: отрезки и углы

Задания интернет-карусели (2020-2021)

1. Лучи OX и OY — биссектрисы соответственно двух смежных углов AOB и BOC . Найдите величину угла AOB , если угол AOX больше угла BOY на 22° ?
2. Точка C лежит на отрезке AB . Она на 5 см ближе к середине отрезка AB , нежели к точке A . Найдите длину отрезка AB , если $AC = 8$ см.
3. Провели N лучей с началом в одной точке. Из углов, которые они образуют, есть углы величиной $110^\circ, 115^\circ, 135^\circ$. При каком наименьшем N такое возможно?
4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Провели луч OE , $\angle AOE = 80^\circ$, $\angle EOD = 100^\circ$. Найдите величину угла BOC .
5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Провели луч OE , $\angle AOE = 70^\circ$, $\angle EOD = 100^\circ$. Найдите величину угла BOC .
6. Какое наибольшее количество тупых углов могут образовать 6 лучей с общим началом?
7. Точки O, A, B, C расположены так, что $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOC = 1,5\angle BOC$. Найдите величину угла BOC .
8. Точки O, A, B, C расположены так, что $\angle AOB = 20^\circ$, $\angle AOC = 1,5\angle BOC$. Найдите величину угла BOC .
9. На красном отрезке AB длины 20 см отметили зеленым все точки X , обладающие следующим свойством: одна из точек A и B расположена ближе к X , нежели к середине отрезка AB . Зеленые точки образовали один или несколько зеленых отрезков. Сколько сантиметров составляет суммарная длина зеленых отрезков?
10. Точки O, A, B, C расположены так, что градусные меры углов AOB и BOC относятся как $6 : 5$, градусные меры углов BOC и COA относятся как $5 : 7$. Найдите величину угла COA .
11. Провели 10 прямых. Любые две из них пересекаются, кроме двух, которые параллельны. Отметили все точки пересечения, через каждую из них проходят только две данные прямые. Сколько отмечено точек?
12. Провели 10 прямых. Любые две из них пересекаются, кроме двух, которые параллельны. Отметили все точки пересечения, через каждую из них проходят только две данные прямые. Сколько треугольников с вершинами в этих точках, стороны которых лежат на данных прямых?

13. На отрезке AB отметили такую точку C , что $AC : AB = 3 : 4$, $AC - BC = 34$. Найдите длину отрезка AB .
14. При каком наименьшем N верно утверждение: если провести N лучей с общим началом, то среди них найдутся два, угол между которыми меньше 7° ?
15. На прямой отметили четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Известно, что $AB : AD = 2 : 3$, $BC : CD = 3 : 4$. Найдите длину BD , если $AC = 51$.
16. На прямой отметили четыре точки A, B, D, E в указанном порядке. Известно, что $AB : AD = 2 : 3$, $BE : DE = 5 : 4$. Найдите длину BD , если $AE = 91$.
17. На прямой расположено 6 различных точек A, B, C, D, E, F так, что $EF = 2$, $AC = 3$, $DF = 4$, $CE = 7$, $BD = 8$, $AE = 10$, $BF = 12$. Чему равна длина отрезка AB ?

Блок 1. Геометрия: отрезки и углы

Задания, указания, ответы, решения

Занятие посвящено геометрическим задачам про отрезки и углы. Кроме прочих, стоят две цели: (1) научиться считать отношения длин отрезков и (2) рассматривать разные случаи расположения точек на прямой и углов с общей вершиной.

Обратите внимание, что задача № 9 демонстрирует (не называя) понятие «геометрическое место точек». Стоит парами рассмотреть задачи № 4 и № 5, № 7 и № 8, № 11 и № 12.

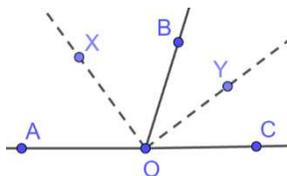
Во всех задачах углом считается часть плоскости, ограниченная лучами, между которыми от 0° до 180° .

1. Лучи OX и OY — биссектрисы соответственно двух смежных углов AOB и BOC . Найдите величину угла AOB , если угол AOX больше угла BOY на 22° ?

Ответ: 112° .

Решение. Из условия, если $\angle AOX = \alpha$, то $\angle BOY = \alpha - 22^\circ$. Так как лучи OX и OY — биссектрисы, то $\angle BOC = 2(\alpha - 22^\circ)$, то $\angle AOB = 2\alpha$.

Из свойства смежных углов: $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$. Тогда $2\alpha + 2(\alpha - 22^\circ) = 180^\circ$, откуда находим искомый угол: $\angle AOB = 2\alpha = (180^\circ + 44^\circ) : 2 = 112^\circ$.



2. Точка C лежит на отрезке AB . Она на 5 см ближе к середине отрезка AB , нежели к точке A . Найдите длину отрезка AB , если $AC = 8$ см.

Ответ: 10 см или 22 см.

Указание. Есть 2 случая расположения точки C относительно середины отрезка.

Решение. Пусть M — середина отрезка AB . По условию $AC - CM = 5$ см, $AC = 8$ см, откуда $CM = 3$ см. Рассмотрим 2 случая.



- (1) Если точка C между точками A и M , то $AM = AC + CM = 11$ см, $AB = 2AM = 22$ см.



- (2) Если точка C между точками B и M , то $AM = AC - CM = 5$ см, $AB = 2AM = 10$ см.

3. Провели N лучей с началом в одной точке. Из углов, которые они образуют, есть углы величиной 110° , 115° , 135° . При каком наименьшем N такое возможно?

Ответ: 3.

Решение. Лучей не менее трёх, так как два луча образуют только один угол. Так как $110^\circ + 115^\circ + 135^\circ = 360^\circ$, то можно провести 3 луча, разбивающих всю плоскость на углы величиной 110° , 115° , 135° .

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Провели луч OE , $\angle AOE = 80^\circ$, $\angle EOD = 100^\circ$. Найдите величину угла BOC .

вертикальные и смежные углы

Ответ: 20° .

Указание. Углы AOE и EOD не могут располагаться в разных полуплоскостях относительно OE (иначе отрезки AB и CD лежат на одной прямой).

Решение. Прямые AB и CD разбивают плоскость на 4 угла. Рассмотрим случаи, в каком из них расположена точка E .

(1) Если точка E внутри угла AOC , то $\angle AOD = \angle EOD - \angle AOE = 20^\circ$. Углы AOD и BOC вертикальные, поэтому $\angle BOC = \angle AOD = 20^\circ$.

(2) Если точка E внутри угла BOD , то $\angle AOD = \angle AOE - \angle EOD$. Это невозможно, так как $\angle AOE < \angle EOD$.

(3) Если точка E внутри угла AOD или угла BOC , то $\angle AOD = \angle AOE + \angle EOD = 180^\circ$. Тогда отрезки AB и CD лежат на одной прямой, то есть не пересекаются.

5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Провели луч OE , $\angle AOE = 70^\circ$, $\angle EOD = 100^\circ$. Найдите величину угла BOC .

вертикальные и смежные углы

Ответ: 30° или 170° .

Указание. Углы AOE и EOD могут располагаться в одной полуплоскости относительно OE , а могут и в разных.

Решение. Прямые AB и CD разбивают плоскость на 4 угла. Рассмотрим случаи, в каком из них расположена точка E .

(1) Если точка E внутри угла AOC , то $\angle AOD = \angle EOD - \angle AOE = 30^\circ$. Углы AOD и BOC вертикальные, поэтому $\angle BOC = \angle AOD = 30^\circ$.

(2) Если точка E внутри угла BOD , то $\angle AOD = \angle AOE - \angle EOD$. Это невозможно, так как $\angle AOE < \angle EOD$.

(3) Если точка E внутри угла AOD или угла BOC , то $\angle AOD = \angle AOE + \angle EOD = 170^\circ$. Углы AOD и BOC вертикальные, поэтому $\angle BOC = \angle AOD = 170^\circ$.

6. Какое наибольшее количество тупых углов могут образовать 6 лучей с общим началом?

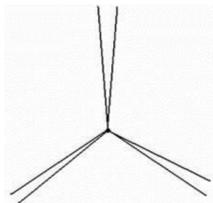
Ответ: 12.

Решение. Из 6 лучей можно составить $6 \cdot 5 : 2 = 15$ пар, значит, можно указать всего 15 углов. Покажем, что среди них обязательно найдутся три острых.

(1) Если они разбивают плоскость на 6 углов, то среди них не более 3 тупых или прямых. Значит, есть 3 острых.

(2) Иначе они лежат в одной полуплоскости (с какой-то границей) и разбивают угол не более 180 градусов на 5 частей, из которых не более двух — тупые или прямые углы. Значит, есть 3 острых.

Пример, когда тупых углов ровно 12, показан на рисунке: при таком расположении три пары образуют острые углы, а лучи из разных пар образуют тупой угол.



7. Точки O, A, B, C расположены так, что $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOC = 1,5\angle BOC$. Найдите величину угла BOC .

Ответ: 48° или 96° .

Решение. Из условия $\angle AOC = 1,5\angle BOC$ следует $\angle AOC = 3\alpha$, $\angle BOC = 2\alpha$ (для некоторого угла α).

Возможно несколько случаев. Пусть OA' и OB' — дополнительные лучи к OA и OB . Все 4 указанных луча делят плоскость на 4 угла. Рассмотрим случаи, в каком из них расположен луч OC .

(1) Если луч OC внутри угла AOB , то $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$, $3\alpha + 2\alpha = 120^\circ$, $\alpha = 24^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 48^\circ$.

(2) Если луч OC внутри угла $A'OB'$, то $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$, $3\alpha - 2\alpha = 120^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 240^\circ$, что невозможно.

(3) Если луч OC внутри угла $A'OB$, то получаем $\angle AOC + \angle BOC + \angle AOB = 360^\circ$, $2\alpha + 3\alpha + 120^\circ = 360^\circ$, $\alpha = 48^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 96^\circ$.

(4) Если луч OC внутри угла AOB' , то $\angle AOC < \angle BOC$, что невозможно.

8. Точки O, A, B, C расположены так, что $\angle AOB = 20^\circ$, $\angle AOC = 1,5\angle BOC$. Найдите величину угла BOC .

Ответ: 8° или 40° .

Решение. Из условия $\angle AOC = 1,5\angle BOC$ следует $\angle AOC = 3\alpha$, $\angle BOC = 2\alpha$ (для некоторого угла α).

Возможно несколько случаев. Пусть OA' и OB' — дополнительные лучи к OA и OB . Все 4 указанных луча делят плоскость на 4 угла. Рассмотрим случаи, в каком из них расположен луч OC .

(1) Если луч OC внутри угла AOB , то $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$, $3\alpha + 2\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 4^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 8^\circ$.

(2) Если луч OC внутри угла $A'OB$, то $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$, $3\alpha - 2\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 40^\circ$.

(3) Если луч OC внутри угла $A'OB'$, то получаем $\angle AOC + \angle BOC + \angle AOB = 360^\circ$, $2\alpha + 3\alpha + 20^\circ = 360^\circ$, $\alpha = 68^\circ$, $\angle BOC = 2\alpha = 136^\circ$. Но при этом $\angle AOC = 3\alpha = 204^\circ$, что невозможно.

(4) Если луч OC внутри угла AOB' , то $\angle AOC < \angle BOC$, что невозможно.

9. На красном отрезке AB длины 20 см отметили зеленым все точки X , обладающие следующим свойством: одна из точек A и B расположена ближе к X , нежели к середине отрезка AB . Зеленые точки образовали один или несколько зеленых отрезков. Сколько сантиметров составляет суммарная длина зеленых отрезков?

Ответ: 20 см.

Решение. Пусть точка C — середина AB .

Точки на отрезке AC — зеленые, так как точка A ближе к любой точке X на AC , чем точка C . Аналогично, все точки на отрезке BC зеленые, так как к каждой точке B ближе, чем точка C .

10. Точки O, A, B, C расположены так, что градусные меры углов AOB и BOC относятся как $6 : 5$, градусные меры углов BOC и COA относятся как $5 : 7$. Найдите величину угла COA .

Ответ: 140° .

Решение. Углы AOB , BOC , COA соотносятся как $6 : 5 : 7$. Из этого отношения следует, что никакой из них не является суммой двух других, значит, их сумма равна 360° . Получаем: $\angle AOB = 6\alpha$, $\angle BOC = 5\alpha$, $\angle COA = 7\alpha$, то $6\alpha + 5\alpha + 7\alpha = 18\alpha = 360^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\angle COA = 7\alpha = 140^\circ$.

11. Провели 10 прямых. Любые две из них пересекаются, кроме двух, которые параллельны. Отметили все точки пересечения, через каждую из них проходят только две данные прямые. Сколько отмечено точек?

Ответ: 44.

Решение. Всего $10 \cdot 9 : 2 = 45$ пар прямых. Все пары, кроме одной, пересекаются в попарно различных точках. Значит, всего $45 - 1 = 44$ отмеченных точек.

12. Провели 10 прямых. Любые две из них пересекаются, кроме двух, которые параллельны. Отметили все точки пересечения, через каждую из них проходят только две данные прямые. Сколько треугольников с вершинами в этих точках, стороны которых лежат на данных прямых?

Ответ: 112.

Решение. Всего $10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 = 120$ троек прямых. Действительно, первую прямую можно выбрать 10 способами, вторую — 9 способами, третью — 8 способами. При этом каждую тройку выбрали 6 способами.

Назовём две параллельные прямые особыми. Каждая тройка прямых, в которой нет обеих особых прямых, соответствует треугольнику. Тройки, в которых обе особые прямые, — нет. Таких троек 8 (пара параллельных с каждой из остальных 6 прямых).

Значит, получено $120 - 8 = 112$ прямых.

13. На отрезке AB отметили такую точку C , что $AC : AB = 3 : 4$, $AC - BC = 34$. Найдите длину отрезка AB .

Ответ: 68.

Решение. Точка C расположена на отрезке AB , поэтому $AC + BC = AB$. Из условия $AC = 3t$, $AB = 4t$, откуда $BC = AB - AC = t$. Из условия $AC - BC = 3t - t = 2t = 34$, $t = 17$. Тогда $AB = 4t = 4 \cdot 17 = 68$.

14. При каком наименьшем N верно утверждение: если провести N лучей с общим началом, то среди них найдутся два, угол между которыми меньше 7° ?

Ответ: 52.

Решение. Проведем 52 луча, разбивающие плоскость на 52 угла. Если величина каждого угла не менее 7° , то должно выполняться $52 \cdot 7^\circ \leq 360^\circ$, что неверно ($52 \cdot 7 = 364$). Значит, найдётся угол меньше 7° .

С другой стороны, можно провести 51 луч, разбивающие плоскость на 51 равный угол. Каждый такой угол будет больше 7° , так как $7 \cdot 51^\circ = 357^\circ < 360^\circ$.

15. На прямой ответили четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Известно, что $AB : AD = 2 : 3$, $BC : CD = 3 : 4$. Найдите длину BD , если $AC = 51$.

Ответ: 21.

Решение. Так как $BC : CD = 3 : 4$, то пусть $BC = 3t$, $CD = 4t$, $BD = BC + CD = 7t$. Из условия $AB : AD = 2 : 3$ следует, что $AB = 2BD = 14t$. Тогда $AC = AB + BC = 17t = 51$, откуда $t = 3$. Значит, $BD = 7t = 21$.

16. На прямой ответили четыре точки A, B, D, E в указанном порядке. Известно, что $AB : AD = 2 : 3$, $BE : DE = 5 : 4$. Найдите длину BD , если $AE = 91$.

Ответ: 13.

Решение. Пусть $BD = t$. Тогда из соотношения $AB : AD = 2 : 3$ следует $AB = 2t$, $AD = 3t$; из $BE : DE = 5 : 4$ следует, что $BE = 5t$, $DE = 4t$.

Тогда $AE = AB + BD + DE = 2t + t + 4t = 7t = 91$, $t = BD = 13$.

17. На прямой расположено 6 различных точек A, B, C, D, E, F так, что $EF = 2$, $AC = 3$, $DF = 4$, $CE = 7$, $BD = 8$, $AE = 10$, $BF = 12$. Чему равна длина отрезка AB ?

Ответ: 4, 20 или 24.

Указание. Из условия следует, что $AE = AC + CE$, $BF = BD + DF$, поэтому точка C лежит на отрезке AE , точка D — на отрезке BF . Относительно отрезка EF отрезки AE и BF могут лежать 4 способами, каждый из них либо накладывается на EF , либо нет. Не трудно проверить, что в одном случае (когда AE накладывается на EF , а BF — нет) совпадают точки A и B , что невозможно по условию. Остальные три случая подходят, в них длина AB равна $10 + 2 + 12 = 24$, $2 + 12 - 10 = 4$ или $10 + 12 - 2 = 20$.