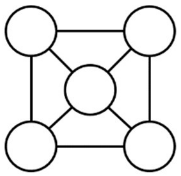
Блок 5. Делимость: разложения на простые

Подготовительное занятие

1. Существуют ли два натуральных числа, в записи которых нет нулей и произведение которых равно 1 000 000?
2. Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина и 138 яблок. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы по содержанию все подарки были одинаковы? Сколько в этих подарках будет мандаринов и яблок?
3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.
4. Машенька и Настенька купили несколько одинаковых пакетов с конфетами. У Машеньки всего 3546 конфеты, а у Настеньки — 7092 конфеты. При этом известно, что у них меньше 100 пакетов с конфетами, а в каждом пакете не больше 200 конфет. Сколько конфет в каждом пакете?
5. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?
6. Олег перемножил какие-то 11 подряд идущих чисел (не обязательно начиная с 1). Могло ли у него получиться число, оканчивающееся ровно на один ноль?
7. На сколько нулей оканчивается произведение всех натуральных чисел (а) от 1 до 30, (б) от 1 до 1000?
8. Существуют ли какие-то три числа, у которых нет общего простого делителя, а у любых двух из них общий простой делитель найдётся?
9. Расставьте в кружках, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.



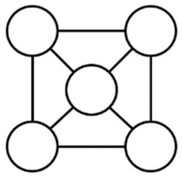
10. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

Блок 5. Делимость: разложения на простые

Подготовительное занятие

1. Существуют ли два натуральных числа, в записи которых нет нулей и произведение которых равно 1 000 000?
2. Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина и 138 яблок. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы по содержанию все подарки были одинаковы? Сколько в этих подарках будет мандаринов и яблок?
3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.
4. Машенька и Настенька купили несколько одинаковых пакетов с конфетами. У Машеньки всего 3546 конфеты, а у Настеньки — 7092 конфеты. При этом известно, что у них меньше 100 пакетов с конфетами, а в каждом пакете не больше 200 конфет. Сколько конфет в каждом пакете?
5. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?
6. Олег перемножил какие-то 11 подряд идущих чисел (не обязательно начиная с 1). Могло ли у него получиться число, оканчивающееся ровно на один ноль?
7. На сколько нулей оканчивается произведение всех натуральных чисел (а) от 1 до 30, (б) от 1 до 1000?
8. Существуют ли какие-то три числа, у которых нет общего простого делителя, а у любых двух из них общий простой делитель найдётся?
9. Расставьте в кружках, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.



10. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

karusel.desc.ru ~ 235 ~

Блок 5. Делимость: разложения на простые

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено задачам про делители числа. Полезно вспомнить основные понятия и умения, связанные с этим.

✓ Простое число — натуральное число, которое имеет ровно два делителя (само себя и число 1). Составное число имеет более 2 делителей. Число 1 не является ни простым, ни составным.

✓ Чтобы проверить, что число n — простое, достаточно проверить[1] его делимость на такие простые числа p, что $p^2 \le n$.

✓ Любое натуральное число, большее 1, можно разложить на простые множители, причем единственным образом. Удобно представлять натуральное число в виде произведения степеней различных простых чисел. Пример: $12 = 2^2 \cdot 3$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

✓ Числа называются взаимно простыми, если у них нет общих простых делителей.

1. Существуют ли два натуральных числа, в записи которых нет нулей и произведение которых равно 1 000 000?

   Ответ: существуют.

   Пример: это числа $5^6 = 15625$ и $2^6 = 64$.

   Комментарий. Полезно понять, что этот пример единственный. Чтобы найти числа, которые в произведении дают $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$, надо его простые делители разбить на две группы. Чтобы в записи не было нулей, надо, по крайней мере, чтоб 2 и 5 не попали в одну группу. Значит, все делители 2 в одной группе, делители 5 — в другой.

2. Для новогодних подарков приготовили 184 мандарина и 138 яблок. Какое наибольшее число подарков можно подготовить, чтобы по содержанию все подарки были одинаковы? Сколько в этих подарках будет мандаринов и яблок?

   Ответ: 46 подарков, в каждом 4 мандарина и 3 яблока.

   Решение. Разложим числа на множители: $184 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$, $138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$. Количество мандаринов, как и количество яблок должно делиться на количество подарков, значит нужен наибольший общий делитель этих чисел: $2 \cdot 23 = 46$. Мандаринов в одном подарке будет $184 : 46 = 4$, яблок — $138 : 46 = 3$.

[1] Точнее говоря, достаточно проверить его делимость на простые числа p, для которых верно $1 < p \le \sqrt{n}$.

   Комментарий. Рекомендуем вспомнить, что такое НОД — наибольший общий делитель. Чтобы его найти, нужно найти наибольший набор простых делителей, входящих в оба разложения.

3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

   Ответ: 57.

   Решение. Разложим число на множители: $1995 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$. Цифры искомого числа — делители числа 1995 (не обязательно простые).

   Число 19 не могло возникнуть из умножения цифр, значит оно — делитель искомого числа. А число 5, наоборот, не может быть множителем искомого числа: если бы изначальное число делилось на 5, то оно бы и оканчивалось на 5 и в разложении 1995 должно возникнуть два числа 5.

   Тогда остаётся проверить следующие варианты искомого числа: 19, $19 \cdot 3 = 57$, $19 \cdot 7 = 133$, $19 \cdot 3 \cdot 7 = 399$. Видно, что подходит только 57.

4. Машенька и Настенька купили несколько одинаковых пакетов с конфетами. У Машеньки всего 3546 конфет, а у Настеньки — 7092 конфеты. При этом известно, что у каждой из них меньше 100 пакетов с конфетами, а в каждом пакете не больше 200 конфет. Сколько конфет в каждом пакете?

   Ответ: 197.

   Решение. Количество конфет в пакете должно быть делителем чисел $3546 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 197$ и $7092 = 2 \cdot 11 \cdot 197$. У этих чисел только 4 общих делителя: 1, 2, 197 и $2 \cdot 197$. Ограничениям, данным в условии, удовлетворяет только число 197.

5. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

   Ответ: да, могут.

   Пример: подходят числа 299 и 300.

   Замечание. Подходят только они и любые числа, которые одинаково начинаются, а заканчиваются на 299 и 300.

6. Олег перемножил какие-то 11 подряд идущих чисел (не обязательно начиная с 1). Могло ли у него получиться число, оканчивающееся ровно на один ноль?

   Ответ: нет, не могло

Решение. Среди 11-ти подряд идущих чисел обязательно есть 2 числа, которые делятся на 5 и более двух чисел, которые делятся на 2. Значит в разложении итогового числа обязательно встретится $5^2 \cdot 2^2 = 100$. Если число делится на 100, то оно заканчивается хотя бы на 2 нуля.

7. На сколько нулей оканчивается произведение всех натуральных чисел (а) от 1 до 30, (б) от 1 до 1000?

Ответ: (а) 7, (б) 249.

Решение. Количество нулей в конце произведения — количество пар, которые можно составить из делителей числа 2 и 5. Поскольку, очевидно, двоек в разложении числа на простые множители больше, будем считать количество множителей 5.

(а) От 1 до 30 есть 30 : 5 = 6 чисел, кратных 5. Каждое даёт произведению простой множитель 5. При этом число 25 даёт сразу два множителя 5. Значит, в произведении будет 6 + 1 = 7 множителей 5.

(б) От 1 до 1 000 есть 1000 : 5 = 200 чисел, кратных 5. Каждое даёт произведению простой множитель 5. Числа, кратные $5^2 = 25$, дают еще по множителю 5, их 1000 : 25 = 40. Числа, кратные $5^3 = 125$, дают еще по множителю 5, их 1000 : 125 = 8. Число, кратное $5^4 = 625$, только одно.

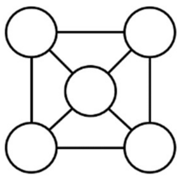
Получаем 200 + 40 + 8 + 1 = 249 множителей 5.

8. Существуют ли какие-то три числа, у которых нет общего простого делителя, а у любых двух из них общий простой делитель найдётся?

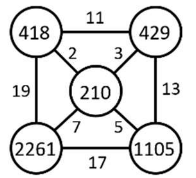
Ответ: да.

Пример: $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $10 = 5 \cdot 2$. Понятно, что в качестве примера подойдут любые три числа p_1p_2, p_2p_3, p_3p_1, где p_1, p_2, p_3 — различные простые числа.

9. Расставьте в кружках, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, пять натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.



Решение. Подходят, например, числа, которые вписаны в кружочки справа.



Комментарий. Гораздо интереснее не сам пример (в том, что он верный, убедиться не так просто), а как он получен.

Припишем каждому отрезку, соединяющему кружки, своё простое число (как это сделано на рисунке справа). В каждый кружок поместим произведение чисел на отрезках, входящих в этот кружок. Тогда два числа будут иметь общий делитель, больший 1, только если они соединены линией.

10. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

Ответ: 64 и 96.

Решение. На втором этапе стирают все простые числа, на третьем — у которых в разложении только 2 простых числа (причем они могу совпадать или быть различны). На 4-ом этапе — у которых в разложении 3 простых (так как все их делители содержат 0, 1 или 2 простых делителя и, значит, уже стерты), и так далее. Последними будут стерты числа с наибольшим количество простых делителей в разложении.

Если у числа хотя бы 7 делителей в разложении на простые множители, то оно не меньше $2^7 = 128$, то есть таких двухзначных чисел нет.

Шесть простых делителей в разложении имеют только числа $2^6 = 64$ и $3 \cdot 2^5 = 96$. Действительно, в разложении два множителя более 2, то число не менее $3^2 \cdot 2^4 > 100$. Если 5 множителей 2 и один более 3, то число не менее $5 \cdot 2^5 = 160$.

Все остальные числа с 6 простыми уже больше 100, значит, последними стерты будут именно эти два числа.