Блок 5. Делимость: разложения на простые

Задания Интернет-карусели (2021)

1. Если натуральное число N поделить на

   $2\frac{2}{7}, 1\frac{1}{11}$ или $3\frac{3}{5}$,

   то оно останется целым.

   Найдите наименьшее N, обладающее таким свойством.

2. Пете и Васе дали 8 карточек с числами 2, 4, 6, 10, 14, 25, 40, 42. Часть карточек взял Петя, другие взял Вася. Оказалось, что произведение всех чисел у Пети равно произведению чисел, оказавшихся у Васи. Чему равно это произведение?

3. При каком наименьшем N среди чисел от 1 до N ровно 2021 чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3?

4. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 2000.

5. Произведение двух натуральных чисел равно 1 000 000, а сумма этих чисел не делится на 10. Сколько пар таких чисел? Пары, отличающиеся только порядком чисел (например, 3, 4 и 4, 3) считать одинаковыми.

6. Петя поделил отрезок на 12 равных частей. Вася хочет поделить этот же отрезок на N равных частей так, чтобы N было не более 20 (и более 1) и никакая его точка деления не совпадала с точкой деления, которую поставил Петя. Сколько значений N, при которых это возможно?

7. Число хорошее, если оно делится и на 12, и на 18. Сколько натуральных чисел от 1 до 2021, являющихся хорошими?

8. Число хорошее, если имеет с числом 2021 общий делитель, больший 1. Сколько натуральных чисел от 1 до 2021, являющихся хорошими?

9. У продавца цветов Валерия количество роз — некоторое число от 400 до 450. Из всех своих роз он может составить букеты из 9 роз. Также все розы он может потратить на букеты из 12 роз. Сколько роз у Валерия?

10. Маша считает, что число хорошее, если у него ровно 4 делителя, сумма которых нечётна. Укажите Маше все хорошие натуральные числа от 1 до 2021?

11. Петя утверждает, что произведение цифр 4-значного числа может быть равно (1) 2020, (2) 2021, (3) 2048, (4) 3003, (5) 8192. Укажите номера вариантов, в которых он прав.

12. Сколько натуральных чисел от 1000 до 7008, кратных 7?

13. Натуральное число N умножили на 10! (произведение всех натуральных чисел от 1 до 10). Получили квадрат целого числа. Для какого наименьшего N такое возможно?

14. Сколько различных простых делителей может иметь натуральное число, у которого ровно 18 делителей (включая 1 и само число)?

15. У двух натуральных чисел наибольший общий делитель равен 6, а наименьшее общее кратное равно 36. Чему равна сумма этих чисел?

Блок 5. Делимость: разложения на простые

Задания Интернет-карусели (2021). Ответы и решения

1. Если натуральное число N поделить на

   $2\frac{2}{7}, 1\frac{1}{11}$ или $3\frac{3}{5}$,

   то оно останется целым.

   Найдите наименьшее N, обладающее таким свойством.

   Ответ: 144.

   Решение. Представим данные числа в виде дробей:

   $$2\frac{2}{7}=\frac{16}{7}, 1\frac{1}{11}=\frac{12}{11}, 3\frac{3}{5}=\frac{18}{5}.$$

   Если натуральное число при делении на дробь даёт целый результата, то само число кратно числителю этой дроби. Поэтому число N — наименьшее число, кратное 16, 12, 18, то есть равно НОК (12; 16; 18) = 144.

2. Пете и Васе дали 8 карточек с числами 2, 4, 6, 10, 14, 25, 40, 42. Часть карточек взял Петя, другие взял Вася. Оказалось, что произведение всех чисел у Пети равно произведению чисел, оказавшихся у Васи. Чему равно это произведение?

   Ответ: 16800.

   Указание. Можно не определять, как Петя и Вася распределили между собой карточки. Нужно просто найти число, квадрат которого равен произведению всех чисел на карточках. Это удобно находить, рассмотрев разложение чисел на простые множители.

   Решение. Даны числа $2, 4 = 2^2, 6 = 2\cdot 3, 10 = 2\cdot 5, 14 = 2\cdot 7, 25 = 5^2, 40 = 2^3\cdot 5$, $42 = 2\cdot 3\cdot 7$, их произведение равно $2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 7^2$. Значит, произведения, полученные Петей и Васей, равны $2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7 = 8\cdot 3\cdot 7\cdot 100 = 16800$.

   Комментарий. Можно однозначно определить, как распределились карточки.

3. При каком наименьшем N среди чисел от 1 до N ровно 2021 чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3?

   Ответ: 6061.

   Указание. Можно подбором найти нужное значение N, а в качестве решения доказать, что оно подходит, и показать, что не подойдут числа меньше. На 2 делится примерно 1/2 всех чисел, на 3 — примерно 1/3 чисел, на 6 — примерно 1/6 часть. Не делятся ни на 2, ни на 3 примерно 1 – (1/2 + 1/3 – 1/6) = 1/3. Поэтому, дано подбирать значение N около 2021 · 3 = 6063.

   Решение. Пусть N = 6061, рассмотрим числа от 1 до 6061. Так как 6061 : 2 = 3030 (ост. 1), то ровно 3030 чисел кратно 2. Так как 6061 : 3 = 2020 (ост. 1), то ровно 2020 чисел кратно 3. Так как 6061 : 6 = 1010 (ост. 1), то ровно 1010 чисел кратны и 2, и 3. Значит, 3030 чисел кратны 2, 2020 – 1010 = 1010 чисел кратны 3, но не кратны 2. Значит, не кратны ни 2, ни 3 ровно 6061 – 3030 – 1010 = 2021 число.

   Число 6061 не кратно ни 2, ни 3. Поэтому, если в качестве N взять 6060 или меньшее число, то искомых чисел будет меньше, чем 2021.

4. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 2000.

   Ответ: 25558.

   Решение. Заметим, что $2000 = 2^4\cdot 5^3$. Число с цифрами 1 точно не наименьшее, так как цифру 1 можно убрать. Множители 5 должны быть отдельными цифрами, четыре множителя 2 входят в разложение не менее чем 2 цифр. Значит, число не менее чем пятизначное. Если пятизначное, что в нём должны быть цифры 5, 5, 5, 2, 8 или 5, 5, 5, 4, 4. Наименьшее такое число — 25558.

5. Произведение двух натуральных чисел равно 1 000 000, а сумма этих чисел не делится на 10. Сколько пар таких чисел? Пары, отличающиеся только порядком чисел (например, 3, 4 и 4, 3) считать одинаковыми.

   Ответ: 12.

   Решение. Если оба множителя не делятся на 10, то это 2^6 и 5^6, их сумма не кратна 10. Иначе один множитель кратен 10, другой — нет. Второй может быть от 2^1 до 2^5, от 5^1 до 5^5 или 1. Итого 12 штук.

6. Петя поделил отрезок на 12 равных частей. Вася хочет поделить этот же отрезок на N равных частей так, чтобы N было не более 20 (и более 1) и никакая его точка деления не совпадала с точкой деления, которую поставил Петя. Сколько значений N, при которых это возможно?

   Ответ: 6.

   Указание. Из чисел от 2 до 20 есть только 6 чисел, взаимно простых с 12.

   Решение. Если НОД (N; 12) = $d \neq 1$, то точки, которые делят отрезок на d частей, будут совпадать с некоторыми точками деления отрезка и на N частей, и на 12 частей. Значит, искомые значения N таковы, что они взаимно просты с числом 12. Таких чисел (от 2 до 20) ровно 6 штук: 5, 7, 11, 13, 17, 19.

7. Число хорошее, если оно делится и на 12, и на 18. Сколько натуральных чисел от 1 до 2021, являющихся хорошими?

Ответ: 56.

Указание: НОК (12; 18) = 36.

Решение. Числа, кратные и 12, и 18, — это числа, кратные НОК (12; 18) = 36. Так как 2021 : 36 = 56 (ост. 5), то искомых хороших чисел ровно 56 штук.

8. Число хорошее, если имеет с числом 2021 общий делитель, больший 1. Сколько натуральных чисел от 1 до 2021, являющихся хорошими?

Ответ: 89.

Указание: 2021 = 43 · 47, 43 + 47 – 1 = 89.

Решение. Заметим, что 2021 = 43 · 47. Значит, общими делителями могут быть числа 43, 47 или их произведение. Хорошими могут быть числа из группы 43, 2 · 43, …, 47 · 43 (47 штук) или из группы 47, 2 · 47, …, 43 · 47 (43 штуки). При этом в обеих группах есть только число 43 · 47. Значит, всего хороших чисел 47 + 43 – 1 = 89.

9. У продавца цветов Валерия количество роз — некоторое число от 400 до 450. Из всех своих роз он может составить букеты из 9 роз. Также все розы он может потратить на букеты из 12 роз. Сколько роз у Валерия?

Ответ: 432.

Указание: НОК (9, 12) = 36.

Решение. Общее число роз кратно 9 и 12, значит, делится на НОК (9, 12) = 36. Из чисел от 400 до 450 только 432 делится на 36.

10. Маша считает, что число хорошее, если у него ровно 4 делителя, сумма которых нечётна. Укажите Маше все хорошие натуральные числа от 1 до 2021?

Ответ: 8.

Решение. Если у числа 4 делителя, то это 1, p, q, pq (где p, q — простые числа, не равные друг другу) или 1, p, p^2, p^3 (где p — простое число). Во первом случае сумма делителей $(p+1)(q+1)$, она нечётна только при $p = q = 2$, что невозможно. В первом случае p чётно, то есть $p = 2$.

11. Петя утверждает, что произведение цифр 4-значного числа может быть равно (1) 2020, (2) 2021, (3) 2048, (4) 3003, (5) 8192. Укажите номера вариантов, в которых он прав.

Ответ: 3.

Решение. Если число существует, то в его записи нет цифры «0».

(1) Произведение цифр числа не равно 2020, так как 2020 = 20 · 101, число 101 — простое, никакая ненулевая цифра не может быть кратна 101.

(2) Произведение цифр числа не равно 2021, так как 2020 = 43 · 47, число 43 — простое, никакая ненулевая цифра не может быть кратна 43.

(3) Так как 2048 = $2^{11} = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2$ = 8 · 8 · 8 · 4, то, например, число 8884 имеем произведение цифр, равное 2048.

(4) Произведение цифр числа не равно 3003, так как 2020 = 3 · 7 · 11 · 13, число 13 — простое, никакая ненулевая цифра не может быть кратна 13.

(5) Так как 8192 = 2^{13}, то хотя бы одна цифра должна делиться на 2 не менее чем 4 раза. Это невозможно, так как ненулевая цифра не может быть кратна 2^4 = 16.

12. Сколько натуральных чисел от 1000 до 7008, кратных 7?

Ответ: 859.

Решение. От 1000 до 7008 всего 7008 – 999 = 6009 чисел. Так как 6009 : 7 = 858 (ост. 3), то эти 6009 чисел образуют 858 групп по 7 соседних чисел и еще 3 числа (7006, 7007 и 7008). В каждой группе ровно одно число кратно 7, в остатке только число 7007 кратно 7. Поэтому искомое количество равно 858 + 1 = 859.

13. Натуральное число N умножили на 10! (произведение всех натуральных чисел от 1 до 10). Получили квадрат целого числа. Для какого наименьшего N такое возможно?

Ответ: 7.

Решение. Представим данное число в виде разложения на простые множители: $10! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Все простые числа, кроме 7, входят в чётной степени. Значит, чтобы получить полный квадрат, надо умножить на 7.

14. Сколько различных простых делителей может иметь натуральное число, у которого ровно 18 делителей (включая 1 и само число)?

Ответ: 1, 2, 3.

Указание: 18 = 2 · 3 · 3.

Решение. Если число раскладывается в произведение 5 взаимно простых чисел и равно $abcde$, то оно имеет не менее 32 делителей. Действительно, произведение любого набора из a, b, c, d, e является делителем, все наборы дают разные произведения, а всего таких наборов 2^5 = 32.

Значит, число с 18 делителями имеет не более 4 простых делителей. Если число — произведение 4 простых чисел, то оно имеет 2^4 = 16 делителей. Если какой-то простое p входит в разложение хотя бы 2 раза, то есть не менее 16 делителей, в которые p входит 1 раз, и еще не менее 16 делителей, в которые p входит 2 раза.

Значит, число с 18 делителями имеет не более 3 простых делителей. Остается заметить, что 18 делителей имеют числа p^{17}, pq^8, pq^2r^2, где p, q, r — попарно различные простые числа. То есть, 18 делителей может иметь число, имеющее 1, 2 или 3 различных простых делителей.

15. У двух натуральных чисел наибольший общий делитель равен 6, а наименьшее общее кратное равно 36. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 30 и 42.

Указание: это 6 и 36 или 12 и 18.

Решение. Если НОД $(a; b) = 6$, то $a = 6m$, $b = 6n$, где НОД $(m; n) = 1$. При этом НОК $(a; b) = mn \cdot$ НОД $(a; b) = 36$, откуда $mn = 6$. Число 6 раскладывается в произведение взаимно простых чисел только как $1 \cdot 6$ и $2 \cdot 3$. В этих случаях числа a и b равны 6 и 36, 12 и 18. Их сумма 42 или 30.

Комментарий. Это решение без введения переменных несложно показать, изображая разложения данных чисел на простые множители, их НОД и НОК с помощью кругов Эйлера.