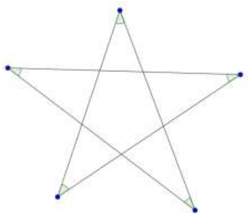
Блок 7. Геометрия. Подсчёт углов

Подготовительное занятие

1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M. Оказалось, что, $\angle BAM = 35°$, $\angle CAM = 15°$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC.
2. Дан треугольник ABC, $\angle B = 73°$, $\angle C = 43°$. Провели высоту AH и биссектрису AL. Какая точка ближе к вершине B: H или L?
3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 36°, проведена биссектриса BK. Докажите, что $BK = BC$.
4. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90°$, $\angle A = 48°$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B.
5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75°. Определите угол при основании треугольника.
6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).



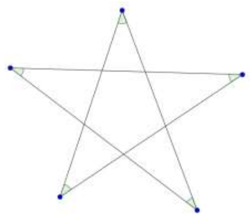
7. Дан треугольник ABC, $\angle A = 80°$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.
8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O, $\angle BOC = 80°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

Блок 7. Геометрия. Подсчёт углов

Подготовительное занятие

1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M. Оказалось, что, $\angle BAM = 35°$, $\angle CAM = 15°$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC.
2. Дан треугольник ABC, $\angle B = 73°$, $\angle C = 43°$. Провели высоту AH и биссектрису AL. Какая точка ближе к вершине B: H или L?
3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 36°, проведена биссектриса BK. Докажите, что $BK = BC$.
4. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90°$, $\angle A = 48°$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B.
5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75°. Определите угол при основании треугольника.
6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).
7. Дан треугольник ABC, $\angle A = 80°$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.
8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O, $\angle BOC = 80°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.



karusel.desc.ru ~ 333 ~

Блок 7. Геометрия. Подсчёт углов

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено геометрическим задачам, в которых идёт подсчёт углов треугольников.

Одна из целей занятия — вспомнить факты школьной программы: теоремы о сумме углов треугольник, теорему о величине внешнего угла треугольника, признаки и свойства равнобедренных треугольников. В задаче № 4 используется свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

Другая цель — продемонстрировать ученикам, что при решении полезно искать величины даже тех углов, о которых не говорится в условии, а также выражать величины углов, вводя переменные.

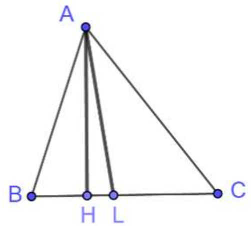
1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M. Оказалось, что, $\angle BAM = 35°$, $\angle CAM = 15°$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC.

    Ответ: 50°, 110°, 20°.

    Решение. (1) Из условия $\angle A = 15° + 35° = 50°$.
    (2) Треугольник ABM — равнобедренный, поэтому $\angle BMA = \angle BAM = 35°$.
    Из суммы углов треугольника ABM имеем
    $\angle B = \angle ABM = 180° - 35° - 35° = 110°$.
    (3) Из суммы углов треугольника ABC имеем
    $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 50° - 110° = 20°$.

2. Дан треугольник ABC, $\angle B = 73°$, $\angle C = 43°$. Провели высоту AH и биссектрису AL. Какая точка ближе к вершине B: H или L?

    Ответ: точка Н ближе.

    Указание. Как определить, какая точка ближе? Найдём углы BAH и BAL, меньшему углу соответствует ближайшая точка.

    Решение. Из суммы углов треугольника ABC имеем $\angle BAC = 180° - 73° - 43° = 64°$. Так как AL — биссектриса, то $\angle BAL = \angle BAC : 2 = 64° : 2 = 32°$.

    Из суммы углов треугольника ABH имеем $\angle BAH = 180° - 90° - 73° = 17°$.

    Так как $\angle BAL > \angle BAH$, то точка H ближе к точке B, нежели точка L.

    Комментарий. Можно доказать, что если $\angle B > \angle C$, то к вершине B точка H ближе, нежели точка L. Данный треугольник — остроугольный, точки H и L лежат на стороне BC. Если L ближе, то угол ALB тупой, если дальше, то угол ALB острый. Суммы углов треугольников ALB и ALC равны, то есть

    $\angle BAL + \angle ABL + \angle ALB = \angle CAL + \angle ACL + \angle ALC$.

    Заметим, что $\angle BAL > \angle BAH$, $\angle BAL = \angle CAL$. Значит, $\angle ALB < \angle ALC$. Так как $\angle ALB + \angle ALC = 180°$, то $\angle ALB$ — острый. Значит, к вершине B ближе точка H, нежели точка L.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A, равным 36°, проведена биссектриса BK. Докажите, что $BK = BC$.

    Указание. Полезно найти величины тех углов, которые можно посчитать, а затем изучить результаты и сделать полезные выводы.

    Решение. Углы при основании данного треугольника равны $(180° - 36°) : 2 = 72°$. Значит, $\angle KBA = \angle KBC = 36°$. Из суммы углов треугольника BCK получаем $\angle BKC = 180° - 36° - 72° = 72°$.

    Теперь заметим, что треугольник ABK — равнобедренный ($\angle KBA = \angle KAB = 36°$) и треугольник BCK — равнобедренный ($\angle BKC = \angle C = 72°$). Значит, $BC = BK = KA$.

4. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90°$, $\angle A = 48°$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B.

    Ответ: 6°.

    Решение. Пусть BH — медиана, BM — медиана. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Поэтому, треугольник ABM равнобедренный, $\angle A = 48°$, $\angle BMA = 180° - 48° - 48° = 84°$.

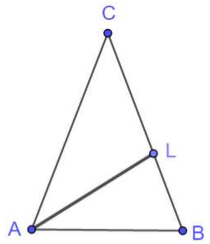
    Из суммы углов прямоугольного треугольника ABC следует, что $\angle AMB = 90° - \angle AMB = 90° - 84° = 6°$.

5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75°. Определите угол при основании треугольника.

    Ответ: 50° или 70°.

    Решение. (1) Дан равнобедренный треугольник. Если биссектриса проведена к основанию, то она является высотой, то есть не может образовывать со стороной угол 75°. Значит, указанная биссектриса проведена к боковой стороне.

(2) Пусть дан треугольник ABC, $AC = CB$, AL — данная биссектриса, $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$. Тогда, $\angle B = 2\alpha$. Биссектриса образует с BC угол $\angle BLA = 180° - \alpha - 2\alpha = 180° - 3\alpha$ или смежный с ним $\angle CLA = 3\alpha$.



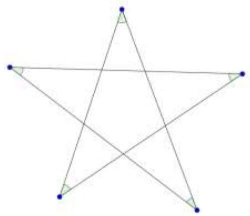
Если $\angle BLA = 75°$, то $180° - 3\alpha = 75°$, $\alpha = 35°$.

Если $\angle CLA = 75°$, то $\alpha = 25°$.

В первом случае угол при основании равен $2\alpha = 70°$, во втором — $2\alpha = 50°$.

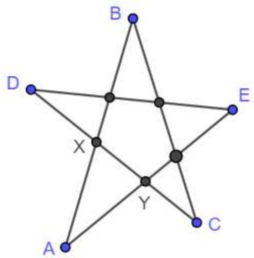
Комментарий. Обратите внимание учеников, что при решении удобно ввести переменную.

6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).



Ответ: 180°.

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке:



Заметим, что $\angle AXY = \angle B + \angle C$, так как $\angle AXY$ — внешний для треугольника BCX. Также $\angle AYX = \angle D + \angle E$, так как $\angle AYX$ — внешний для треугольника DEY.

Тогда из суммы углов треугольника AXY получаем:
$180° = \angle A + \angle AXY + \angle AYX = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$.

7. Дан треугольник ABC, $\angle A = 80°$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.

Ответ: 50°.

Решение. Пусть указанные биссектрисы пересекаются в точке I, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда из суммы углов треугольника ABC имеем $80° + 2\beta + 2\gamma = 180°$, откуда $\beta + \gamma = 50°$. Из суммы углов треугольника BCI имеем $\angle BIC + \beta + \gamma = 180°$, откуда

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

$\angle BIC = 130°$. Так как углом между прямыми считается тот, чья величина не более 90°, то угол между биссектрисами равен $180° - 130° = 50°$.

Комментарий (про решение). Задачу можно решить, введя одну переменную, например, величину угла B.

Комментарий (обобщение). Аналогично можно выразить угол BIC через величину угла A треугольника: $\angle BIC = 90° + \angle A/2$. Обратите внимание, что это любопытный факт: угол между биссектрисами двух углов треугольника зависит только от третьего.

8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O, $\angle BOC = 80°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Ответ: 50°.

Решение. Треугольники ACB и BCD — равнобедренные. Пусть $\angle BCA = \angle BAC = \alpha$, $\angle BDC = \angle CBD = \beta$. Угол OBC — внешний для треугольника ACB, значит $\angle OBC = 2\alpha$. Угол OCB — внешний для треугольника BCD, значит $\angle OCB = 2\beta$. Из суммы углов треугольника OBC имеем $2\alpha + 2\beta + 80° = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 50°$.

Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке N. Из суммы углов треугольника BNC имеем $\angle BNC = 180° - \angle BCA - \angle CBD = 180° - (\alpha + \beta) = 130°$. Угол между прямыми AC и BD равен $180° - 130° = 50°$.