Блок 9. Комбинаторика

Интернет-карусель (2023–2024)

Условия, ответы, решения и указания

1. Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 5 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 5 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Боря — с Васей, Вася — с Геной, а Гена — с Димой?

   Ответ: 10.

   Решение. Антона можно посадить 5 способами, Борю рядом с ним 2 способами, а далее всё рассаживаются однозначно. Итого $5 \cdot 2 = 10$ способов.

2. Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 6 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 6 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Боря — с Васей, Гена — с Димой, а Дима — с Егором?

   Ответ: 24.

   Решение. Обозначим друзей первыми буквами их имён. Рядом стоят АБВ и ГДЕ. Антона можно усадить 6 способами, Борю — 2 способа, место Васи определяется однозначно. Далее 2 способа для Гены, остальные однозначно. Итого $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ способа.

   Дополнительный вопрос. Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 5 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 5 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Боря — с Васей?

   Ответ: $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$.

   Дополнительный вопрос.

   ✓Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 6 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 6 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Вася — с Геной, Дима — с Егором?

   Ответ: 96.

   Решение. АБ, ВГ, ДЕ. Антон — 6 способов, Боря — 2 способа, Вася — 4 способа, Гена — 1 способ, Дима — 2 способа, Егор — 1 способ. Итого: $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

   ✓Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 6 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 6 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Вася — с Геной?

   Ответ: $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 144$.

   ✓Вокруг круглого стола через равные промежутки стоят 7 разных стульев. Сколькими способами на них могут сесть 7 друзей, если Антон должен сидеть рядом с Борей, Боря — с Васей, Гена — с Димой, Егор — с Женей?

   Ответ: 96.

3. Люсе нравится натуральное число, если в нём есть 2 соседние цифры, отличающиеся на 1. Сколько двузначных чисел нравятся Люсе?

   Ответ: 17

   Решение. Это числа 10, 21, 31, …, 98 и 12, 23, …, 89 — всего $9 + 8 = 17$ чисел.

4. Люсе нравится натуральное число, если в нём есть 2 соседние цифры, отличающиеся на 1. Например, Люсе нравится число 156, но не нравятся числа 516 или 135. Сколько трёхзначных чисел нравятся Люсе?

   Ответ: 300.

   Решение. Есть 18 упорядоченных пар соседних цифр: «10», «21», «31», …, «98» и «01», «12», «23», …, «89». Одна из них начинается с «0».

   Трёхзначное число, которое нравится Люсе, можно получить одним из 2 способов. Можно к паре, не начинающейся с «0», приписать в конце любую цифру — получим $17 \cdot 10 = 170$ чисел. Можно к любой паре приписать в конце любую цифру, отличную от «0» — получим $18 \cdot 9 = 162$ числа.

   В $170 + 162 = 332$ вариантах дважды посчитаны числа, где есть 2 пары.

   Найдём количество таких чисел.

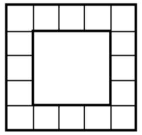
   Способ 1 (длинный). Такие числа имеют вид $\overline{abc}, \overline{aba}, \overline{bab}, \overline{cba}$, где $a < b < c$ — три подряд идущие цифры.

   Подсчитаем количество:
   чисел вида $\overline{abc}$ — 7 штук, так как цифра a может быть от 1 до 7;
   чисел вида $\overline{aba}$ — 8 штук, так как цифра a может быть от 1 до 8;
   чисел вида $\overline{bab}$ — 9 штук, так как цифра a может быть от 0 до 8;
   чисел вида $\overline{cba}$ — 8 штук, так как цифра a может быть от 0 до 7.
   Всего $7 + 8 + 9 + 8 = 32$ повторяющихся чисел.

   Способ 2 (короткий, предложил Федя Шилин). Если в числе 2 такие пары, то мы можем на первые 2 места поставить одну из 17 пар, а последнюю цифру — одну из двух (на 1 меньше или на 1 больше предыдущей). Исключение для пар 89 и 10, когда есть только 1 вариант. Итого $17 \cdot 2 - 2 = 32$ числа.

Искомое количество равно 332 – 32 = 300 чисел.

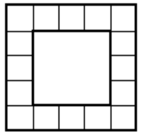
5. На рамке из 16 клеток, показанной на рисунке, нужно поставить две шахматные ладьи, одну — красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи стояли в соседних по стороне клетках?



Ответ: 32.

Решение. У каждой клетки есть две соседние. Красную ладью можно поставить в любую из 16 клеток, затем синюю ладью можно поставить 2 способами. Поэтому всего 16 · 2 = 32 способами.

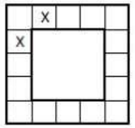
6. На рамке из 16 клеток, показанной на рисунке, нужно поставить две шахматные ладьи, одну —красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи стояли в клетках, имеющих хотя бы одну общую вершину?



Ответ: 40.

Решение. Клетки в такой паре имеют либо общую сторону, либо только одну общую вершину.

Первых пар — 16 штук (это результат предыдущей задачи), на них можно поставить ладьи 16 · 2 = 32 способами.

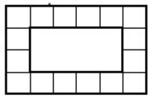
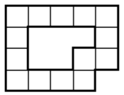


Вторых пар — 4 штуки (одна из них на картинке справа), на них можно поставить ладьи 4 · 2 = 8 способами.

Всего 32 + 8 = 40 способов.

Дополнительные вопросы.

✓Та же задача для рамок, показанных на рисунке.

(а)  (б) 

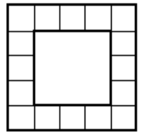
(а) Ответ: 40.

Указание. Здесь, как и в задаче выше, 16 пар соседних клеток и еще 4 пары клеток с одним общим углом.

(б) Ответ: 40.

Указание. В рамке 14 клеток, значит, 14 пар соседних, в них 28 вариантов. Еще есть 6 пар клеток с одним общим углом, в них еще 12 вариантов. Итого 40.

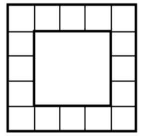
7. На рамке из 16 клеток, показанной на рисунке, нужно поставить две шахматные ладьи, одну —красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи били друг друга?



Ответ: 80.

Решение. Выберем 4 способами сторону рамки, затем 5 способами поставим на эту сторону красную ладью и в любую из 4 оставшихся клеток на этой стороне поставим синюю ладью. Итого 4 · 5 · 4 = 80 вариантов.

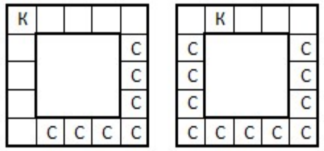
8. На рамке из 16 клеток, показанной на рисунке, нужно поставить две шахматные ладьи, одну —красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи не били друг друга?



Ответ: 160.

Решение 1. Если красную ладью поставили в одну из четырёх угловых клеток, то есть 7 способов поставить синюю ладью (пример такого случая показан ниже на левой картинке). Таких вариантов 4 · 7 = 28.

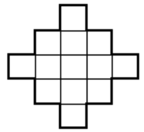
Если красную ладью не поставили в угол (таких клеток 16 – 4 = 12), то есть 11 способов поставить синюю ладью (пример такого случая показан ниже на правой картинке). Таких вариантов 12 · 11 = 132.



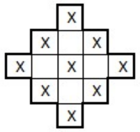
Итого 28 + 132 = 160 способов.

Решение 2 (дополнение). Всего его 16 · 15 вариантов поставить две разные ладьи. Плохих вариантов (когда ладью бьют друг друга) — 80 = 16 · 5 вариантов (это результат предыдущая задачи). Итого 16 · 15 – 16 · 5 = 16 · 10 = 160 способов.

9. Можно закрашивать зеленым цветом клетки фигуры, показанной на рисунке. Нельзя закрашивать клетки, имеющие общую сторону. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток?

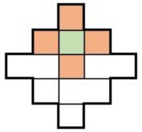


Ответ: 9.



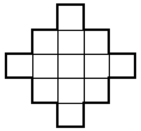
Решение. Можно закрасить любые 8 клеток из девяти, отмеченных на рисунке крестиком.

Покажем, что иных вариантов нет. Предложим, зеленым закрашена клетка, не отмеченная крестиком, как показано на рисунке ниже.



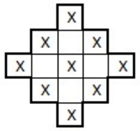
Тогда в красные клетки закрашивать нельзя, остальные можно разбить на 3 пары и 2 клетки. В паре нельзя закрасить 2 клетки. Поэтому еще закрашено не более 3 + 2 = 5 клеток. Всего закрашено не более 1 + 5 = 6 клеток.

10. Можно закрашивать зеленым цветом клетки фигуры, показанной на рисунке. Нельзя закрашивать клетки, имеющие общую сторону. Сколькими способами можно закрасить 7 клеток?



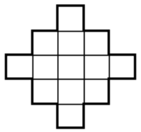
Ответ: 36.

Решение. Как показано в решении предыдущей задачи, если закрашено более 6 клеток, то это клетки, отмеченные на рисунке справа крестиком.



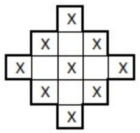
Достаточно выбрать 2 крестика, где красить не надо. Это можно сделать 9 · 8 : 2 = 36 способами.

11. Можно закрашивать зеленым цветом клетки фигуры, показанной на рисунке. Нельзя закрашивать клетки, имеющие общую сторону. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток?

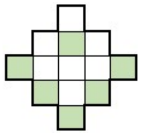


Ответ: 88.

Решение. Можно закрасить любые 6 клеток из девяти, отмеченных на рисунке крестиком. Найдём это количество вариантов.



Пронумеруем эти клетки числами от 1 до 9. Посмотрим, какие 3 клетки из них не окрашены. Если не окрашена № 1, то из остальных 8 штук выбрать 2 клетки можно 8 · 7 : 2 = 28 способами; если № 2 — 7 · 6 : 2 = 21 способом; если № 3 — 6 · 5 : 2 = 15 способами; если № 4 — 5 · 4 : 2 = 10 способами; если № 5 — 4 · 3 : 2 = 6 способами; если № 6 — 3 · 2 : 2 = 3 способами; если № 7 — 1 способом. Всего 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84 способа.



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2023–2024 учебный год

Если закрашена одна из остальных 4 клеток, то остальная раскраска однозначна (пример показан справа). Итого еще 4 варианта.

Всего 84 + 4 = 88.

12. Сколько двузначных (натуральных) чисел, в записи которых есть цифра меньше 5?

Ответ: 65.

Решение 1. Подходят все числа от 10 до 49, их 40 штук. В каждом из остальных 9 десятков подойдёт числа, оканчивающиеся на 0, 1, 2, 3, 4, — по 5 чисел в каждом. Итого 40 + 5 · 5 = 65 чисел.

Решение 2. Всего 90 двузначных чисел. Всего 5 цифр, которые не меньше 5 (это 5, 6, 7, 8, 9). Всего 5 · 5 = 25 двузначных чисел, в которых обе цифры не менее 5. У остальных 90 – 25 = 65 чисел есть хотя бы одна цифра меньше 5.

Дополнительные вопросы.

✓Сколько двузначных чисел, в записи которых есть цифра не меньше 5?

Ответ: 70.

Решение 1 (перебор). Большие цифры — 5, 6, 7, 8, 9. Чисел, начинающихся с большой цифры — 50 штук (5 полных десятков). В каждом из остальных четырёх десятков подходит половина чисел. Итого 50 + 40 : 2 = 70.

Решение 2 (дополнение). Чисел, у которых каждая цифра 0, 1, 2, 3 или 4 — 4 · 5 = 20. Значит, подходят 90 – 20 = 70 чисел.

✓Сколько двузначных чисел, в записи которых есть цифра меньше 4?

Решение 1 (перебор). Маленькие цифры — 0, 1, 2, 3. Чисел, начинающихся с маленьких цифр — 30 штук (3 полных десятка). В каждом из остальных шести десятков подходят по 4 числа (оканчивающиеся на 0, 1, 2, 3). Итого 30 + 6 · 4 = 54.

Решение 2 (дополнение). Чисел, у которых каждая цифра 4, 5, 6, 7, 8 или 9, всего 6 · 6 = 36. Тогда подходят 90 – 36 = 54 числа.

13. Отличнице Зое нравятся натуральные числа, в записи которых есть цифра не меньше 5. Отличнице Маше нравятся натуральные числа, в записи которых есть цифра не больше 5. Сколько трёхзначных чисел, которые нравятся хотя бы одной из девочек?

Ответ: 900.

Решение. Любая цифра либо не меньше 5, либо не больше 5. Поэтому, подойдёт любое число. Всего 900 трёхзначных чисел.

14. Отличнице Зое нравятся натуральные числа, в записи которых есть цифра не меньше 5. Отличнице Маше нравятся натуральные числа, в записи которых есть цифра не больше 5. Сколько двузначных чисел нравятся и Маше, и Зое?

Ответ: 54.

Решение. Зое нравятся числа с цифрой 5, 6, 7, 8 или 9. Маше нравятся числа с цифрой 0, 1, 2, 3, 4 или 5.

Во-первых, им обеим нравится любое число с цифрой 5. Это 15, 25, 35, 45, 50–59, 65, 75, 85 и 95 — 18 чисел.

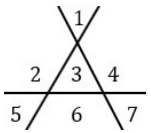
Во-вторых, из остальных чисел нравятся те, где одна цифра большая (6, 7, 8 или 9), а другая — маленькая (0, 1, 2, 3 или 4). Чисел, где первая цифра большая, $4 \cdot 5 = 20$ штук, где первая цифра маленькая, всего $4 \cdot 4 = 16$. Итого $20 + 16 = 36$.

Итог: $18 + 36 = 54$.

15. На квадратном листе бумаги проводят 3 отрезка от края до края. Затем по всем линиям проводят разрезы. Сколько частей могло получиться?

Ответ: 4, 5, 6, 7.

Решение. Три прямые могут разделить плоскость минимум на 3 части (так как с каждым разрезом добавляется хотя бы одна часть), максимум — на 7 частей (рисунок справа).



Все значения от 4 до 7 возможны. Они показаны на рисунке ниже.