

## Блок 1. Геометрия: отрезки и углы

### Подготовительное занятие

- Точки  $A, B, C$  расположены на прямой в указанном порядке,  $AB : BC = 3 : 4$ . Найдите отношения  $AB : AC$  и  $BC : AC$ .
  - Угол  $AOB$  — прямой. Угол  $AOC$  в полтора раза больше угла  $AOB$ . Найдите величину угла  $BOC$ .
  - Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что  $AB : BD = 2 : 3, AC : CD = 7 : 5$ . Во сколько раз отрезок  $AD$  больше отрезка  $BC$ ?
  - Точки  $A, B, M$  расположены на одной прямой, причём отрезок  $AM$  вдвое больше отрезка  $BM$ . Найдите  $AM$ , если  $AB = 6$ .
1. На прямой отмечены точки  $A, B$  и  $C$ . Известно, что  $AB = 5$ , отрезок  $AC$  длиннее  $BC$  в полтора раза. Найдите отрезки  $AC$  и  $BC$ .
  2. Угол  $AOB$  равен  $40^\circ$ , а угол  $BOC$  равен  $80^\circ$ . Чему равен угол между биссектрисами углов  $AOB$  и  $BOC$ ? Рассмотрите все возможные случаи.
  3. Точки  $A, B, C, D$  последовательно расположены на одной прямой,  $AB : BC = 3 : 4, BC : CD = 2 : 5$ . Найдите отношение  $AB : CD$ .
  4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.
  5. Отрезок  $AD$ , длина которого равна 28, разделен точками  $B$  и  $C$  на три отрезка  $AB, BC$  и  $CD$ . Расстояние между серединами отрезков  $AB$  и  $CD$  равно 16. Найдите длину отрезка  $BC$ .
  6. На прямой отметили четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ . Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?
  7. Начертите четыре луча  $OA, OB, OC$  и  $OD$  с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в  $100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ$  и  $140^\circ$ .
  8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметим все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если  
(а) никакие три прямые не проходят через одну точку;  
(б) могут найтись тройки прямых, проходящий через одну точку?
  9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?  
(б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

## Блок 1. Геометрия: отрезки и углы

### Подготовительное занятие

- Точки  $A, B, C$  расположены на прямой в указанном порядке,  $AB : BC = 3 : 4$ . Найдите отношения  $AB : AC$  и  $BC : AC$ .
  - Угол  $AOB$  — прямой. Угол  $AOC$  в полтора раза больше угла  $AOB$ . Найдите величину угла  $BOC$ .
  - Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что  $AB : BD = 2 : 3, AC : CD = 7 : 5$ . Во сколько раз отрезок  $AD$  больше отрезка  $BC$ ?
  - Точки  $A, B, M$  расположены на одной прямой, причём отрезок  $AM$  вдвое больше отрезка  $BM$ . Найдите  $AM$ , если  $AB = 6$ .
1. На прямой отмечены точки  $A, B$  и  $C$ . Известно, что  $AB = 5$ , отрезок  $AC$  длиннее  $BC$  в полтора раза. Найдите отрезки  $AC$  и  $BC$ .
  2. Угол  $AOB$  равен  $40^\circ$ , а угол  $BOC$  равен  $80^\circ$ . Чему равен угол между биссектрисами углов  $AOB$  и  $BOC$ ? Рассмотрите все возможные случаи.
  3. Точки  $A, B, C, D$  последовательно расположены на одной прямой,  $AB : BC = 3 : 4, BC : CD = 2 : 5$ . Найдите отношение  $AB : CD$ .
  4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.
  5. Отрезок  $AD$ , длина которого равна 28, разделен точками  $B$  и  $C$  на три отрезка  $AB, BC$  и  $CD$ . Расстояние между серединами отрезков  $AB$  и  $CD$  равно 16. Найдите длину отрезка  $BC$ .
  6. На прямой отметили четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ . Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?
  7. Начертите четыре луча  $OA, OB, OC$  и  $OD$  с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в  $100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ$  и  $140^\circ$ .
  8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметим все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если  
(а) никакие три прямые не проходят через одну точку;  
(б) могут найтись тройки прямых, проходящий через одну точку?
  9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?  
(б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

## Блок 1. Геометрия: отрезки и углы

### Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено геометрическим задачам про отрезки и углы. Кроме прочих, стоят две цели: (1) научиться считать отношения отрезков и (2) рассматривать разные случаи расположения точек на прямой и углов с общей вершиной.

В решениях задач, в частности, продемонстрирован удобный способ считать отношения отрезков за счёт удачно введенной переменной.

Под углом подразумеваем фигуру, состоящую из двух лучей с общим началом. Считаем, что градусная мера любого угла от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

Как обычно, предлагаем в начале занятия обсудить с учениками задачи, отмеченные точкой. Задания с номерами — для самостоятельного решения. Рекомендуем разобрать задачу про угол между часовыми стрелками.

- Точки  $A, B, C$  расположены на прямой в указанном порядке,  $AB : BC = 3 : 4$ . Найдите отношения  $AB : AC$  и  $BC : AC$ .

Ответ:  $AB : AC = 3 : 7, BC : AC = 4 : 7$ .

Решение. Если  $AB : BC = 3 : 4$ , то есть такое  $t$ , что  $AB = 3t, BC = 4t$ .

Тогда получаем:

$$AB : AC = (3t) : (7t) = 3 : 7,$$

$$BC : AC = (4t) : (7t) = 4 : 7.$$

Комментарий. Вводить переменную таким образом удобно для вычислений.

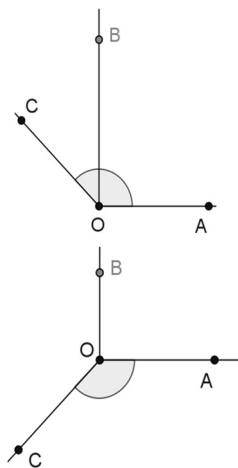
- Угол  $AOB$  — прямой. Угол  $AOC$  в полтора раза больше угла  $AOB$ . Найдите величину угла  $BOC$ .

Ответ:  $45^\circ, 135^\circ$ .

Решение. Из условия  $\angle AOC = 1,5 \cdot \angle AOB = 1,5 \cdot 90^\circ = 135^\circ$ . Есть 2 варианта, как могут быть расположены углы  $AOC$  и  $AOB$ : либо лучи  $OB$  и  $OC$  в одной полуплоскости относительно прямой  $OA$ , либо в разных. Эти случаи показаны на рисунках справа.

В случае 1 получаем:  $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 45^\circ$ .

В случае 2 получаем: так как  $\angle AOC + \angle AOB = 225^\circ > 180^\circ$ , то  $\angle BOC = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$ .



- Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что  $AB : BD = 2 : 3, AC : CD = 7 : 5$ . Во сколько раз отрезок  $AD$  больше отрезка  $BC$ ?

Ответ:  $AD : BC = 60 : 11$ .

Указание. Выберем удобно переменную. Так как  $AB : BD = 2 : 3$ , то  $AD$  состоит из 5 равных частей (две такие части образуют  $AB$ , три другие —  $BD$ ). Аналогично, так как  $AC : CD = 7 : 5$ , то  $AD$  состоит из  $7 + 5 = 12$  равных частей. Тогда поделим отрезок  $AD$  на НОК  $(5; 12) = 60$  частей.

Решение. Пусть  $AD = 60t$ .

Получаем:

$$AB = AD : (2 + 3) \cdot 2 = 24t,$$

$$AC = AD : (7 + 5) \cdot 7 = 35t,$$

$$BC = AC - AB = 35t - 24t = 11t,$$

$$AD : BC = (60t) : (11t) = 60 : 11.$$

- Точки  $A, B, M$  расположены на одной прямой, причём отрезок  $AM$  вдвое больше отрезка  $BM$ . Найдите  $AM$ , если  $AB = 6$ .

Ответ:  $AM = 4$  или  $AM = 12$ .

Решение. По условию  $AM = 2BM$ . Пусть  $BM = t, AM = 2t$ .

Точка  $M$  может лежать на отрезке  $AB$  или вне отрезка (за точкой  $A$  или за точкой  $B$ ). Рассмотрим эти три варианта.

(1) Если точка  $M$  на отрезке  $AB$ , то  $AM + BM = AB$ .

Отсюда  $2t + t = 6, t = 2, AM = 2t = 4$ .

(2) Если точка  $M$  лежит вне отрезка за точку  $A$ , то  $MA + AB = BM$ .

Отсюда  $2t + 6 = t, t = -6 = BM$ , что невозможно.

(3) Если точка  $M$  лежит вне отрезка за точку  $B$ , то  $MB + BA = MA$ .

Отсюда  $t + 6 = 2t, t = 6, AM = 2t = 12$ .

Комментарий. Из условия сразу понятно, что точка  $M$  не может лежать вне отрезка за точку  $A$ . Действительно, в этом случае  $MA < MB$ , а по условию  $MA > MB$ .

1. На прямой отмечены точки  $A, B$  и  $C$ . Известно, что  $AB = 5$ , отрезок  $AC$  длиннее  $BC$  в полтора раза. Найдите отрезки  $AC$  и  $BC$ .

Ответ:  $AC = 15, BC = 10$  или  $AC = 3, BC = 2$ .

Решение. По условию  $AC = 1,5BC$  или  $2AC = 3BC$ . Пусть  $BC = 2t, AC = 3t$ .

Если точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ , то  $AC + BC = AB$ , откуда  $3t + 2t = 5, t = 1, BC = 2, AC = 3$ .

Точка  $A$  не может лежать между точками  $B$  и  $C$ , так как в этом случае  $AC < BC$ .

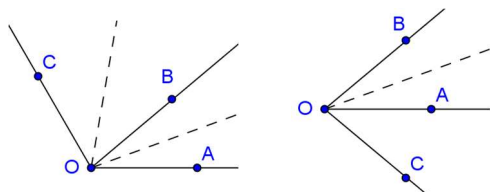
Если точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , то  $AB + BC = AC$ , откуда  $5 + 2t = 3t$ ,  $t = 5$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 15$ .

Комментарий. Обратите внимание, что если даны точки  $A, B$  и положительное число  $d$ , не равное 1, то найдутся 2 точки  $C$ , что  $AC : BC = d$ . При этом одна точка лежит на отрезке  $AB$ , другая вне отрезка  $AB$ .

2. Угол  $AOB$  равен  $40^\circ$ , а угол  $BOC$  равен  $80^\circ$ . Чему равен угол между биссектрисами углов  $AOB$  и  $BOC$ ? Рассмотрите все возможные случаи.

Ответ:  $20^\circ$  или  $60^\circ$ .

Решение. Возможны два взаимных расположения углов  $AOB$  и  $BOC$ : лучи  $OA$  и  $OC$  в разных полуплоскостях относительно  $OB$  (рисунок слева), лучи  $OA$  и  $OC$  в одной полуплоскости относительно  $OB$  (рисунок справа),



В первом случае, не трудно понять по рисунку, что угол между биссектрисами равен полусумме углов  $AOB$  и  $BOC$ , то есть  $(40^\circ + 80^\circ) : 2 = 60^\circ$ .

Во втором случае (на рисунке биссектриса угла  $BOC$  — луч  $OA$ ) угол между биссектрисами равен полуразности углов  $AOB$  и  $BOC$ , то есть  $(80^\circ - 40^\circ) : 2 = 20^\circ$ .

3. Точки  $A, B, C, D$  последовательно расположены на одной прямой,  $AB : BC = 3 : 4$ ,  $BC : CD = 2 : 5$ . Найдите отношение  $AB : CD$ .

Ответ:  $3 : 10$ .

Решение. Пусть  $AB = 3t$ . Из равенства  $AB : BC = 3 : 4$  следует, что  $BC = 4t$ . Из условия  $BC : CD = 4t : CD = 2 : 5$ , откуда  $CD = 4t \cdot 5 : 2 = 10t$ . Значит,  $AB : CD = 3t : 10t = 3 : 10$ .

4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.

Ответ:  $80^\circ$ .

Указание. Не нужно забывать, что часовая стрелка сдвинется с числа 10.

Решение. За 10 минут минутная стрелка сдвинется на  $360^\circ : 6 = 60^\circ$ , а часовая — на  $30^\circ : 6 = 5^\circ$ . Значит, в 10:40 часовая сдвинется от 00:00 на  $30^\circ \cdot 10 + 5^\circ \cdot 4 = 320^\circ$ , а минутная — на  $60^\circ \cdot 4 = 240^\circ$ . Искомый угол равен  $320^\circ - 240^\circ = 80^\circ$ .

5. Отрезок  $AD$ , длина которого равна 28, разделен точками  $B$  и  $C$  на три отрезка  $AB, BC$  и  $CD$ . Расстояние между серединами отрезков  $AB$  и  $CD$  равно 16. Найдите длину отрезка  $BC$ .

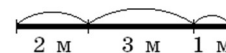
Ответ: 4.

Решение. Сумма длин половинок отрезков  $AB$  и  $CD$  равна  $28 - 16 = 12$ . Тогда  $AB + CD = 24$ ,  $BC = AD - (AB + CD) = 28 - 24 = 4$ .

6. На прямой отметили четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ . Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?

(а) Ответ: такое возможно.

Решение. Точки могли быть расположены так, как показано на рисунке:



(б) Ответ: нет, не могли.

Решение. Расстояния между несоседними точками не могут равняться 1 (как сумма двух или трёх натуральных чисел). Значит, все три расстояния между соседями равны 1. Но тогда расстояние между крайними точками равно 3, а оно наибольшее и должно равняться 4. Противоречие.

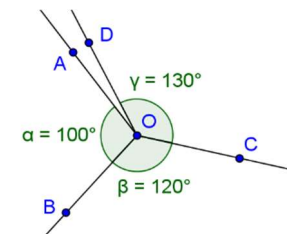
7. Начертите четыре луча  $OA, OB, OC$  и  $OD$  с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в  $100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ$  и  $140^\circ$ .

Решение. Лучи можно расположить, например, так, как показано на рисунке справа.

Углы величиной  $100^\circ, 120^\circ$  и  $130^\circ$  отмечены на рисунке.

Также  $\angle AOD = 360^\circ - 100^\circ - 120^\circ - 130^\circ = 10^\circ$ , поэтому  $\angle BOD = 110^\circ, \angle AOC = 140^\circ$ .

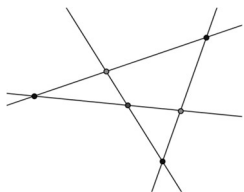
Комментарий. Как придумать такой пример? Расположить все лучи в одной полуплоскости не получится. Поэтому стоит заметить, что  $360^\circ = 100^\circ + 120^\circ + 140^\circ$ , и расположить лучи  $OA, OB$  и  $OC$  так, чтобы образовались углы  $100^\circ, 120^\circ, 140^\circ$ . Луч  $OD$  после этого подбирается не сложно.



8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметили все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если  
 (а) никакие три прямые не проходят через одну точку;  
 (б) могут найтись тройки прямых, проходящих через одну точку?

(а) Ответ: 6.

Решение. Нетрудно получить ответ, нарисовав картинку.



Каждая точка — пересечение двух прямых. Поэтому, количество точек — число способов выбрать две прямые из четырёх, то есть  $4 \cdot 3 : 2 = 6$ .

(б) Ответ: 1, 4 или 6.

Решение. (1) Если нет трёх прямых, проходящих через одну точку, то получится 6 точек пересечения. (2) Если 3 прямые проходят через одну точку, а четвертая пересекает эти три прямые в разных точках, то будет  $1 + 3 = 4$  точки. (3) Если все четыре прямые проходят через одну точку, то точка пересечения одна.

Замечание. Интересно также рассмотреть ситуации, когда некоторые прямые могут не пересекаться (быть параллельными). Тогда возможно 0, 1, 3, 4 или 6 точек пересечения.

9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?  
 (б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

Ответ: можно, примеры показаны на рисунках.

