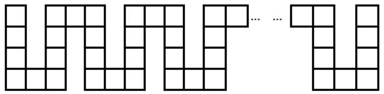
# Блок 5. Разрезания и замощения

## *Задания Интернет-карусели (2021)*

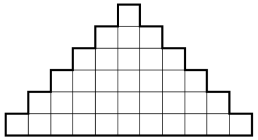
1. Петя разрезал по границам клеток клетчатый квадрат $11 \times 11$. Среди полученных частей — $N$ квадратов, среди которых нет равных. При каком наибольшем $N$ такое возможно?

2. Вася нарисовал фигуру в форме зигзага, как показано на рисунке.

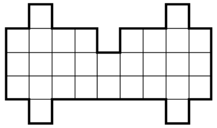


Её высота — 4 клетки, её длина — 99 клеток. Сколько квадратиков нарисовал Вася?

3. Федя разрезал фигуру, показанную на рисунке, на $N$ частей, из которых потом сложил квадрат. При каком наименьшем $N$ такое возможно?

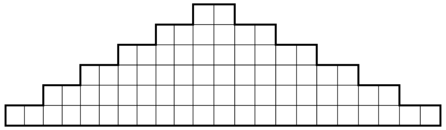


4. Фигуру, изображенную на рисунке, разрезали по сторонам клеток на 3 равные части. Чему равен периметр одной части, если длина стороны клетки равна 1?

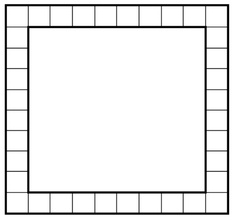


5. Клетчатый квадрат $8 \times 8$ разрезали на прямоугольники из 2 клеток и уголки из 3 клеток. Всего получилось 26 частей. Сколько из них уголков?

6. Федя разрезал фигуру, показанную на рисунке, на $N$ частей, из которых потом сложил два равных квадрата. При каком наименьшем $N$ такое возможно?



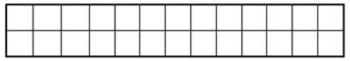
7. Клетчатую рамку, показанную на рисунке, разрезали на $N$ частей и сложили из них квадрат. При каком наименьшем $N$ такое возможно?



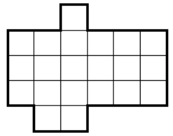




8. Сколькими способами фигуру, показанную на рисунке, можно разрезать на прямоугольники, состоящие из 2 клеток?



9. Сколькими способами клетчатую фигуру, показанную на рисунке, можно разрезать на уголки, состоящие из 3 клеток?

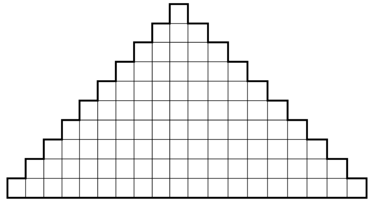


10. Петя разрезал по границам клеток клетчатый квадрат $5 \times 5$ на уголки из 3 клеток и прямоугольники из 2 клеток. Какое наибольшее количество уголков могло получиться?

11. Клетчатый квадрат $6 \times 6$ разрезали по сторонам клеток на 6 равных частей. Чему равен периметр одной части, если длина стороны клетки равна 1?

12. Сколькими способами клетчатую доску $12 \times 12$ можно разрезать по границам клеток на равные квадраты?

13. Какое наибольшее количество прямоугольников, состоящих из двух клеток, можно вырезать из клетчатой фигуры, показанной на рисунке?



14. Клетчатый прямоугольник, показанный на рисунке, разрезали на несколько равных частей так, что в каждой части есть одна клетка с буквой А и одна клетка с буквой Б. Какова суммарная длина проведенных разрезов, если длина стороны клетки равна 1?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| А | А | | | | А |
| | | | Б | Б | |
| | Б | | Б | Б | |
| | Б | | | | |
| | | А | А | А | |

15. Сколькими способами из клетчатой доски $8 \times 8$ можно вырезать клетчатый квадрат $3 \times 3$? Способы, получаемые поворотами и переворотами доски, считать различными.

# Блок 5. Разрезания и замощения

## *Задания Интернет-карусели. Ответы, указания, решения*

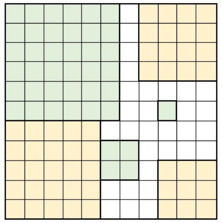
1. Петя разрезал по границам клеток клетчатый квадрат $11 \times 11$. Среди полученных частей — $N$ квадратов, среди которых нет равных. При каком наибольшем $N$ такое возможно?

   Ответ: 6.

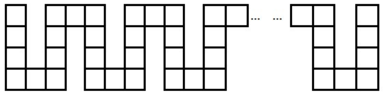
   Указание: нельзя расположить 2 квадрата, у которых стороны не менее 6.

   Решение. Центральная клетка квадрата $11 \times 11$ накрывается любым квадратом, сторона которого не менее 6. Значит, нельзя вырезать 2 таких квадрата, то есть можно вырезать не более 6 различных квадратов.

   Вырезать квадраты со стороной 1, 2, 3, 4, 5, 6 не сложно, пример показан на рисунке.



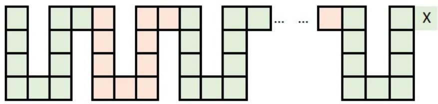
2. Вася нарисовал фигуру в форме зигзага, как показано на рисунке.



   Её высота — 4 клетки, её длина — 99 клеток. Сколько квадратиков нарисовал Вася?

   Ответ: 249.

   Решение 1. Если добавить одну клетку справа, как показано на рисунке, то весь зигзаг можно поделить на $(99 + 1) : 4 = 25$ одинаковых блоков.



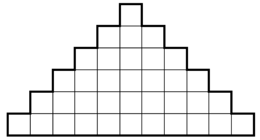
   Каждый блок состоит из 10 клеток. Значит, данный зигзаг состоит из $25 \cdot 10 - 1 = 249$ клеток.

   Решение 2. В прямоугольнике $99 \times 4$ чередуются целые столбцы и столбцы с вырезами из 3 клеток. Так как $99 = 49 + 50$, то вырезано из 49 столбцов. Осталось $4 \cdot 99 - 3 \cdot 49 = 249$ клеток.



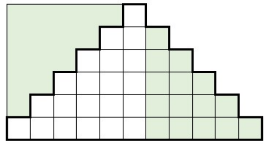


3. Федя разрезал фигуру, показанную на рисунке, на $N$ частей, из которых потом сложил квадрат. При каком наименьшем $N$ такое возможно?

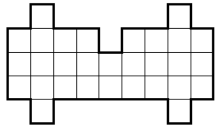


   Ответ: 2.

   Решение. С одной стороны, разрезать хотя бы на 2 части нужно. С другой стороны, можно поделить только на 2 части. Как это сделать, показано на рисунке.

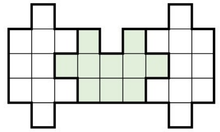


4. Фигуру, изображенную на рисунке, разрезали по сторонам клеток на 3 равные части. Чему равен периметр одной части, если длина стороны клетки равна 1?



   Ответ: 18.

   Решение. Возможное разрезание показано на рисунке. Периметр каждой части равен 18.



   Комментарий. Такой вопрос задачи, конечно, требует доказательства единственности ответа. В данном случае, видимо, способ разрезания единственный, в рамках соревнования ничего доказывать было не нужно.

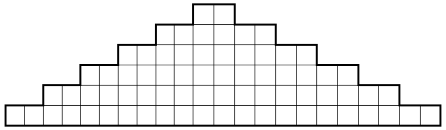
5. Клетчатый квадрат $8 \times 8$ разрезали на прямоугольники из 2 клеток и уголки из 3 клеток. Всего получилось 26 частей. Сколько из них уголков?

   Ответ: 12.

   Решение 1. Если бы все 26 частей были из 2 клеток, то было бы $26 \cdot 2=52$ клетки. Но на доске 64 клетки. Замена части из 2 клеток на часть из 3 клеток увеличивает количество частей на 1. Надо $64 - 52 = 12$ замен. После них будет 12 уголков.

   Решение 2. Если разрезать на части из 2 клеток, то получится $8 \cdot 8 : 2 = 32$ части. При замене 3 частей из 2 клеток на 2 части из 3 клеток количество частей уменьшается на 1. Значит, таких замен надо провести $32 - 26 = 6$, уголков будет $6 \cdot 2 = 12$.

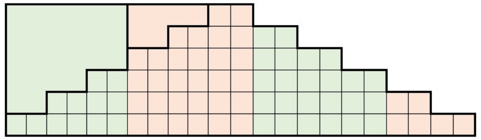
6. Федя разрезал фигуру, показанную на рисунке, на $N$ частей, из которых потом сложил два равных квадрата. При каком наименьшем $N$ такое возможно?



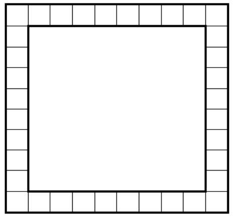
Ответ: 4.

Решение. «Горка» состоит из 72 клеток, каждый квадрат будет из 36 клеток, то есть размером $6 \times 6$. Заметим, квадрат $6 \times 6$ нельзя вырезать из такой фигуры целиком, значит, каждый квадрат будет состоять по крайней мере из 2 частей. Фигуру надо разрезать не менее чем на 4 части.

С другой стороны, разрезание на 4 части возможно. Оно показано на рисунке.

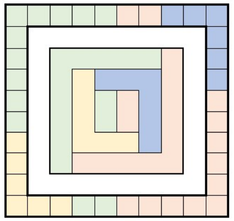


7. Клетчатую рамку, показанную на рисунке, разрезали на $N$ частей и сложили из них квадрат. При каком наименьшем $N$ такое возможно?

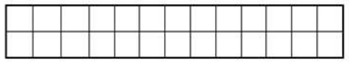


Ответ: 6

Решение. Рамка состоит из 36 клеток, значит, надо составить квадрат $6 \times 6$. Каждая часть, которую можно вырезать из рамки, содержит не менее 2 клеток только в одной горизонтали. Если частей будет 5, то будет горизонталь, в которой каждая часть занимает не более 1 клетки. То есть, в этой горизонтали по крайней мере 1 клетка будет не покрыта частями рамки. А вот на 6 частей, из которых собирается квадрат, получить из рамки можно. Пример показан на рисунке.



8. Сколькими способами фигуру, показанную на рисунке, можно разрезать на прямоугольники, состоящие из 2 клеток?

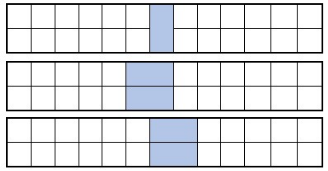


Ответ: 377





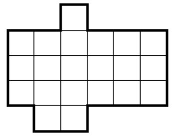
Указание. Центральный столбец может быть накрыт одним из 3 способов из показанных на рисунке.



Перебором нетрудно обнаружить, что прямоугольники $2 \times 5$ и $2 \times 6$ можно разрезать на прямоугольники, состоящие из 2 клеток, соответственно 8 и 13 способами. Значит, в первом случае $13 \cdot 13$ способов, в двух других— по $8 \cdot 13$ способов. Всего $13 \cdot 13 + 2 \cdot 8 \cdot 13 = 377$ способов.

Комментарий. Можно доказать, что количество способов — числа Фибоначчи. В данном случае ответом является 14-е число Фибоначчи.

9. Сколькими способами клетчатую фигуру, показанную на рисунке, можно разрезать на уголки, состоящие из 3 клеток?

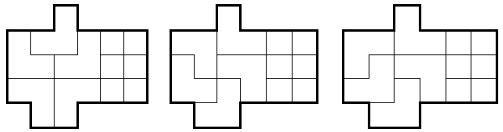


Ответ: 6

Указание. Выступающая сверху клетка закрыта уголком одним из 2 способов.

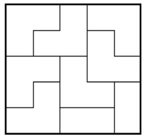
При первом способе (первый рисунок) еще 4 уголка ставятся однозначно, оставшуюся часть можно покрыть 2 способами.

При втором способе (второй и третий рисунки рисунок) также еще 4 уголка ставятся однозначно, оставшуюся часть можно покрыть 2 способами.



Значит, всего $2 \cdot 2 + (2 + 2) \cdot 2 = 6$ способов.

10. Петя разрезал по границам клеток клетчатый квадрат $5 \times 5$ на уголки из 3 клеток и прямоугольники из 2 клеток. Какое наибольшее количество уголков могло получиться?



Ответ: 7.

Решение. В квадрате 25 клеток, 25 : 3 = 8 (ост. 1). Значит, уголков не более 8. Если их 8, то одну оставшуюся клетку прямоугольником из 2 клеток не накрыть. Вариант, когда 7 уголков, возможен. Он показан на рисунке справа.

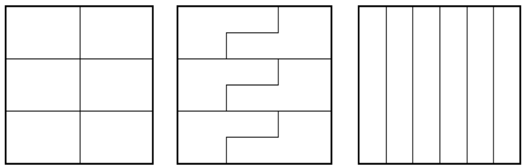
11. Клетчатый квадрат $6 \times 6$ разрезали по сторонам клеток на 6 равных частей. Чему равен периметр одной части, если длина стороны клетки равна 1?

Ответ: 10 12 14

Указание. Каждая часть должна состоять из 6 клеток. Фигура из 6 клеток может иметь периметр 10, 12 или 14.

Это можно определить перебором, который можно сократить следующим образом. Будем считать, что если клетка присоединена к остальным только одной стороной, то её можно убрать. Периметр от этого уменьшится на 2. Если последовательно убирать такие клетки, то останется 1 клетка, квадрат $2 \times 2$ или прямоугольник $2 \times 3$. В первом случае к периметру клетки, равному 4, надо добавить $5 \cdot 2 = 10$, получаем периметр $4 + 10 = 14$. Во втором аналогично получаем периметр $8 + 2 \cdot 2 = 12$. В третьем случае периметр равен 10.

Примеры разрезания на части периметров 10, 12 и 14 показаны на рисунке.



12. Сколькими способами клетчатую доску $12 \times 12$ можно разрезать по границам клеток на равные квадраты?

Ответ: 5.

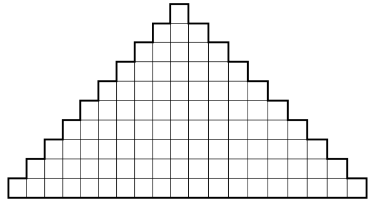
Решение. Сторона части может быть только делителем числа 6, то есть быть равной 1, 2, 3, 4, 6. Всего 5 способов.

Замечание. Можно еще добавить способ, когда ничего не режут. Ответ «6» также был засчитан верным.





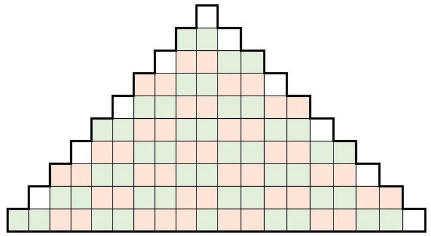
13. Какое наибольшее количество прямоугольников, состоящих из двух клеток, можно вырезать из клетчатой фигуры, показанной на рисунке?



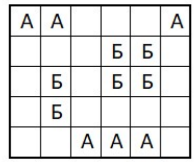
Ответ: 45

Решение. Фигура содержит 100 клеток. Если её клетки покрасить в 2 цвета в шахматном порядке, то клеток одного цвета будет 45, другого — 55. Так как каждый прямоугольник из 2 клеток содержит по одной клетке каждого цвета, то можно вырезать не более 45 таких прямоугольников.

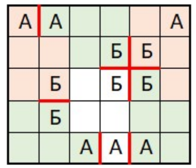
С другой стороны, можно вырезать ровно 45 штук. Как это сделать, показано на рисунке.



14. Клетчатый прямоугольник, показанный на рисунке, разрезали на несколько равных частей так, что в каждой части есть одна клетка с буквой А и одна клетка с буквой Б. Какова суммарная длина проведенных разрезов, если длина стороны клетки равна 1?



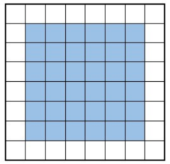

Ответ: 19




Указание. Доску из $5 \cdot 6 = 30$ клеток надо разрезать на 6 частей, значит, каждая часть состоит из 5 клеток. Можно провести границы между одинаковыми буквами (там должны пройти разрезы). После небольшого перебора можно показать, что способ разрезания единственный. Он показан на рисунке, в нём длина разрезов равна 19.

15. Сколькими способами из клетчатой доски $8 \times 8$ можно вырезать клетчатый квадрат $3 \times 3$? Способы, получаемые поворотами и переворотами доски, считать различными.

Ответ: 36.



Решение. Центр части $3 \times 3$ может быть только в клетках, отмеченных на рисунке синим цветом. Таких клеток 36, значит, способов вырезать часть $3 \times 3$ тоже 36.