

Блок 8. Доли

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

1. Стоимость четырех одинаковых тетрадок составляет $\frac{5}{7}$ стоимости книги. А какую долю составляет цена книги от стоимости пяти таких же тетрадок?
2. Треть класса — девочки. Половина девочек и четверть мальчиков — отличники. Какова доля отличников в классе?
3. Одну сторону прямоугольника увеличили на треть, а другую уменьшили на четверть. Во сколько раз изменилась площадь?
4. Если из комнаты выйдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате уменьшится на $\frac{1}{3}$, а если вместе с папой — то на $\frac{5}{6}$. Во сколько раз уменьшится суммарный возраст, если из комнаты выйдет только папа?
5. Семеро пиратов решили поделить пиастры. Первый взял себе $\frac{1}{7}$ часть денег, второй — $\frac{1}{6}$ от оставшегося, третий — $\frac{1}{5}$ остатка, четвертый — $\frac{1}{4}$ остатка, пятый — $\frac{1}{3}$ остатка, шестой — половину остатка, а юнге досталось два пиастра. Сколько всего было пиастров?
6. Как разделить семь яблок поровну между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать (а) более чем на 5 частей, (б) более чем на 3 части?
7. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?

Блок 8. Доли

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

1. Стоимость четырех одинаковых тетрадок составляет $\frac{5}{7}$ стоимости книги. А какую долю составляет цена книги от стоимости пяти таких же тетрадок?
2. Треть класса — девочки. Половина девочек и четверть мальчиков — отличники. Какова доля отличников в классе?
3. Одну сторону прямоугольника увеличили на треть, а другую уменьшили на четверть. Во сколько раз изменилась площадь?
4. Если из комнаты выйдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате уменьшится на $\frac{1}{3}$, а если вместе с папой — то на $\frac{5}{6}$. Во сколько раз уменьшится суммарный возраст, если из комнаты выйдет только папа?
5. Семеро пиратов решили поделить пиастры. Первый взял себе $\frac{1}{7}$ часть денег, второй — $\frac{1}{6}$ от оставшегося, третий — $\frac{1}{5}$ остатка, четвертый — $\frac{1}{4}$ остатка, пятый — $\frac{1}{3}$ остатка, шестой — половину остатка, а юнге досталось два пиастра. Сколько всего было пиастров?
6. Как разделить семь яблок поровну между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать (а) более чем на 5 частей, (б) более чем на 3 части?
7. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?

Блок 8. Доли

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Для занятия собраны задачи, в которых требуются операции с долями и обыкновенными дробями. Избегается обязательное использование десятичных дробей, по возможности — введение переменных.

Во многих задачах оперируют долями, не указывая сами величины. Например, в задаче № 1 говорится про соотношение цен, но сами цены не даны. Для решения задачи нужно либо оперировать только долями (как показано в решении) или вводить переменные. Введение в рассуждение конкретных величин, не данных в условии, даёт неверное решение, которое пусть и приводит к верному ответу. Подробнее см. комментарий к решению задачи № 1.

Пример рассуждений частями (фактически вводятся переменные без указания оных) показан в решении задачи № 2, в решении задачи № 4 в аналогичной ситуации введена переменная.

Некоторые задачи позволяют вспомнить темы «Круги Эйлера» и «Обратный ход».

1. Стоимость четырех одинаковых тетрадок составляет $\frac{5}{7}$ стоимости книги. А какую долю составляет цена книги от стоимости пяти таких же тетрадок?

Ответ: $\frac{28}{25}$ или 1,12.

Решение. Одна тетрадь стоит $\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{28}$ стоимости книги, 5 тетрадей — $5 \cdot \frac{5}{28} = \frac{25}{28}$. Значит, цена книги составляет $\frac{28}{25}$ от стоимости 5 тетрадей.

Комментарий. Хочется ввести конкретную цену: если книга стоит 7 рублей, то 4 тетради — 5 рублей, 1 тетрадь — 1,25 рублей, 5 тетрадей — 6,25 рублей, искомое отношение равно $\frac{7}{6,25} = \frac{28}{25}$.

Но данные рассуждения не являются полным, верным решением, так как рассматривает частный случай.

2. Треть класса — девочки. Половина девочек и четверть мальчиков — отличники. Какова доля отличников в классе?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Если отличницы — 1 часть, то девочки в классе составляют 2 такие части. Девочек — треть, поэтому мальчиков 4 части, мальчики-отличники — четверть или 1 часть. Тогда в классе 6 частей, из которых 2 части — отличники. Они составляют $\frac{1}{3}$ от класса.

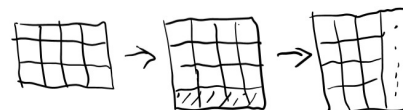
3. Одну сторону прямоугольника увеличили на треть, а другую уменьшили на четверть. Во сколько раз изменилась площадь?

Ответ: 1.

Решение 1. Когда одну сторону прямоугольника увеличили на треть, площадь увеличилась на $\frac{1}{3}$. Её площадь стала составлять $\frac{4}{3}$ от первоначальной.

Когда уменьшили на четверть, площадь уменьшилась на четверть от $\frac{4}{3}$, то есть на $\frac{1}{3}$. Значит, она стала равна 1 от первоначальной, то есть площадь не изменилась.

Решение 2. Можно нарисовать то, как изменилось. Разделим прямоугольник на 12 частей, как показано на рисунке.



Было 12 равных частей и стало 12 равных частей. Площадь не изменилась.

4. Если из комнаты выйдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате уменьшится на $\frac{1}{3}$, а если вместе с папой — то на $\frac{5}{6}$. Во сколько раз уменьшится суммарный возраст, если из комнаты выйдет только папа?

Ответ: 2.

Решение. Суммарный возраст S . Мама — $\frac{S}{3}$. Мама и папа — $\frac{5S}{6}$. Папа — $\frac{S}{2}$. Ушел папа — стало $\frac{S}{2}$, уменьшилось в 2 раза.

5. Семеро пиратов решили поделить пиастры. Первый взял себе $\frac{1}{7}$ часть денег, второй — $\frac{1}{6}$ от оставшегося, третий — $\frac{1}{5}$ остатка, четвертый — $\frac{1}{4}$ остатка, пятый — $\frac{1}{3}$ остатка, шестой — половину остатка, а юнге досталось два пиастра. Сколько всего было пиастров?

Ответ: 14.

Решение. До шестого пирата оставалось 4 пиастра, до пятого — $4 : 2 \cdot 3 = 6$ пиастров, до четвертого — $6 : 3 \cdot 4 = 8$, до третьего $8 : 4 \cdot 5 = 10$, до второго — $10 : 5 \cdot 6 = 12$, до первого — $12 : 6 \cdot 7 = 14$ пиастров.

6. Как разделить семь яблок поровну между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать (а) более чем на 5 частей, (б) более чем на 3 части?

(а) Решение. Разделим три яблока на 4 части (получим 12 кусочков по четверти яблока), а оставшиеся яблоки разделим на три части (получим 12 кусочков по

трети яблока). Отдадим каждому человеку по одному кусочку $1/3$ и одному кусочку $1/4$.



(б) Решение. Изобразим яблоки отрезком, разделенным на 7 равных частей. Далее укажем точки деления на 12 равных частей. Каждая из первых 7 частей будет поделена не более чем на 2 части. Отсюда следует пример разрезания.

В дробях оно соответствует следующему равенству:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{12}\right) + \left(\frac{2}{12} + \frac{7}{12} + \frac{3}{12}\right) + \left(\frac{4}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{6}{12} + \frac{6}{12}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{12} + \frac{7}{12} + \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{3}{12} + \frac{7}{12} + \frac{2}{12}\right) + \left(\frac{5}{12} + \frac{7}{12}\right) = \\ & = \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{12}\right) + \frac{7}{12} + \left(\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\right) + \frac{7}{12} + \left(\frac{1}{12} + \frac{6}{12}\right) + \\ & + \left(\frac{6}{12} + \frac{1}{12}\right) + \frac{7}{12} + \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) + \frac{7}{12} + \left(\frac{2}{12} + \frac{5}{12}\right) + \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

7. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?

Ответ: 20.

Указание. Если придут 10 гостей, то каждый должен получить не меньше двух кусков.

Решение. Когда придут 11 гостей, каждый должен получить $1/11$ часть. Значит, каждый кусок не более $1/11$, то есть менее $1/10$. Вывод: если придут 10 гостей, то каждый получит не меньше двух кусков, откуда общее число кусков не менее 20.

С другой стороны, можно обойтись разрезанием на 20 частей. Сначала разрежем пирог на 11 равных кусков, а затем один из этих кусков разделим еще на 10 равных частей. Если будет 10 гостей, то каждому дадим один большой кусок и один маленький кусок. Если будет 11 гостей, то десяти из них дадим по одному большому куску, а одному — 10 маленьких кусков.

Комментарий. Покажите ученикам, что в таких задачах нужно показать пример (здесь — как разрезать на 20 частей) и доказать минимальность (в данном случае то, что частей не менее 20). Задачи такого типа называют «оценка + пример».