



Блок 8. Доли

Интернет-карусель (2021). Задания

1. Сегодня утром Лёня съел 6 маленьких шоколадок, это $\frac{3}{5}$ от того количества маленьких шоколадок, что он съел вчера. Сколько маленьких шоколадок Лёня съел вчера и сегодня утром?
2. Мама купила пакет конфет. Сначала этот пакет нашёл Тима и съел пятую часть всех конфет. Затем пакет нашёл Лёня и съел треть остатка. Потом Тима отобрал пакет у Лёни и съел четверть остатка. Мама взяла пакет, половину отдала Лёне, одну конфету съела сама и 2 последние конфеты отдала Тиме. Сколько конфет было в пакете изначально?
3. Сегодня утром Тимоша съел несколько маленьких конфеток, что составляет $\frac{5}{6}$ от того количества маленьких конфеток, что он съел вчера. Всего вчера и сегодня утром Тимоша съел 22 маленькие конфетки. Сколько маленьких конфеток съел Тимоша сегодня утром?
4. Какое число можно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{15}{43}$, чтобы получилась дробь равная $\frac{5}{7}$?
5. Какое наибольшее натуральное число можно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{15}{34}$, чтобы получилась дробь меньше, чем $\frac{5}{7}$?
6. Вечером в кафе договорились встретиться N друзей. В итоге половина пришла вовремя, две трети оставшихся опоздали, а один не пришёл. Чему равно N ?
7. К числителю обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ прибавили 35, к знаменателю — 98. Получилась дробь, равная $\frac{a}{b}$. Чему равна сумма $a + b$?
8. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 11, либо 17 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 11, так и между 17 гостями?
9. В 6 «Б» классе 27 человек. Семеро на перемене играли в футбол — это $\frac{1}{9}$ всех девочек и треть всех мальчиков. Сколько мальчиков в 6 «Б» классе?
10. Тиме и Лёне дали по прямоугольному листу бумаги и попросили измерить их ширину, длину, периметр и площадь. Оказалось, что у листа Тимы ширина больше на 25%, чем у листа Лёни, а периметр листа Тимы на 20% больше периметра листа Лёни. Какие из следующих утверждений про площади листов верные?
(1) Площадь листа Тимы может быть больше площади листа Лёни.
(2) Площади листов Тимы и Лёни могут быть равны.
(3) Площадь листа Тимы может быть меньше площади листа Лёни.



11. Маша испекла гостям 9 одинаковых пирогов. Маша и каждый из гостей съели по $\frac{3}{8}$ пирога. Сколько было гостей?
12. Сейчас Тиме 3 года, Лёне 9 лет. Через несколько лет Лёня может быть старше Тимы ровно (1) в 4 раза, (2) в 3 раза, (3) в 2 раза, (4) в полтора раза, (5) на треть от своего возраста. Какие из указанных вариантов возможны?
13. Пятиклассник Рома выписал все натуральные числа от 1 до N , отметил из них те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Сколько значений N от 1 до 100, при которых доля отмеченных чисел меньше $\frac{1}{3}$?
14. Тиме и Лёне дали по прямоугольному листу бумаги и попросили измерить их ширину, длину и площадь. Оказалось, что ширина листа Тимы на 25% больше, чем ширина листа Лёни, длина листа Тимы меньше длины листа Лёни на её треть. Площадь листа Тимы на 6 кв. см меньше площади листа Лёни. Сколько кв. см составляет площадь листа Лёни?
15. У Ани и Вани шаги равной длины. Аня отошла по тропинке от костра на 20 шагов, Ваня — на 2 шага. Они сделали по N шагов, после чего Аня оказалась втрое дальше от костра, чем Ваня. Чему равно N ?

Блок 8. Доли

Интернет-карусель (2021). Задания, указания, решения

1. Сегодня утром Лёня съел 6 маленьких шоколадок, это $\frac{3}{5}$ от того количества маленьких шоколадок, что он съел вчера. Сколько маленьких шоколадок Лёня съел вчера и сегодня утром?

Ответ: 16.

Решение. Если 6 — это $\frac{3}{5}$, то вчера было съедено $6 : 3 \cdot 5 = 10$ шоколадок. Всего $10 + 6 = 16$ штук.

2. Мама купила пакет конфет. Сначала этот пакет нашёл Тима и съел пятую часть всех конфет. Затем пакет нашёл Лёня и съел треть остатка. Потом Тима отобрал пакет у Лёни и съел четверть остатка. Мама взяла пакет, половину отдала Лёне, одну конфету съела сама и 2 последние конфеты отдала Тиме. Сколько конфет было в пакете изначально?

Ответ: 15.

Решение (прямые подсчёты). Разделим все конфеты на 15 равных частей. Тима съел 3 части и осталось 12 частей. Затем 4 части съел Лёня, осталось 8 частей. Потом Тима съел 2 части, осталось 6 частей, из которых 3 части мама отдала Лёне. Осталось 3 части, которые образуют 3 конфеты. Значит, 1 часть — это 1 конфета, изначально было 15 конфет.

Решение (обратные подсчёты). В конце мама и Тима съели $1 + 2 = 3$ конфеты. Значит, мама взяла пакет с $3 \cdot 2 = 6$ конфетами. В нём было $\frac{3}{4}$ от того, что отобрал Тима, то есть Тима отобрал $6 : 3 \cdot 4 = 8$ конфет. Тогда Лёня нашёл пакет, в котором $8 : 2 \cdot 3 = 12$ конфет, что составляет $\frac{4}{5}$ от всех конфет. То есть первоначально было $12 : 4 \cdot 5 = 15$ конфет.

Комментарий. Посчитайте, кто съел больше: Лёня или Тима?

3. Сегодня утром Тимоша съел несколько маленьких конфеток, что составляет $\frac{5}{6}$ от того количества маленьких конфеток, что он съел вчера. Всего вчера и сегодня утром Тимоша съел 22 маленькие конфетки. Сколько маленьких конфеток съел Тимоша сегодня утром?

Ответ: 10.

Решение. Если сегодня Тимоша съел $5t$ конфет, то вчера съел $6t$ штук, а всего — $5t + 6t = 22$, откуда $t = 2$. Значит, он сегодня съел $5t = 10$ конфет.

4. Какое число можно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{15}{43}$, чтобы получилась дробь равная $\frac{5}{7}$?

Ответ: 55.

Решение. Пусть x — искомое число. Из условия

$$\frac{15 + x}{43 + x} = \frac{5}{7}$$

По правилу пропорции $7(15 + x) = 5(43 + x)$, откуда $105 + 7x = 215 + 5x$, $2x = 110$, $x = 55$.

5. Какое наибольшее натуральное число можно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{15}{34}$, чтобы получилась дробь меньше, чем $\frac{5}{7}$?

Ответ: 32.

Решение. Пусть x — искомое число. Из условия

$$\frac{15 + x}{34 + x} < \frac{5}{7}$$

По правилу пропорции $7(15 + x) < 5(34 + x)$, откуда $2x < 65$, $x \leq 32$. Не трудно проверить, что при $x = 32$ условие выполнено.

6. Вечером в кафе договорились встретиться N друзей. В итоге половина пришла вовремя, две трети оставшихся опоздали, а один не пришёл. Чему равно N ?

Ответ: 6.

Решение. Две трети от половины — это треть всего числа. Если пришла половина и треть, то не пришла шестая часть. Так как это — один человек, то $N = 6$.

7. К числителю обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ прибавили 35, к знаменателю — 98. Получилась дробь, равная $\frac{a}{b}$. Чему равна сумма $a + b$?

Ответ: 19.

Решение. Из условия

$$\frac{a + 35}{b + 98} = \frac{a}{b}$$

По правилу пропорции $b(a + 35) = a(b + 98)$, $ab + 35b = ab + 98a$, $35b = 98a$, $5b = 14a$, $a/b = 5/14$.

Комментарий. Интуитивно понятно, что дробь не меняет значение, только если к числителю и знаменателю добавляют числа, пропорциональные числителю и знаменателю. В данном решении это, собственно, и доказано.

8. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 11, либо 17 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 11, так и между 17 гостями?

Ответ: 27.

Решение. Разделим пирог 17 разрезами на 17 равных частей. Затем, начиная от одного из имеющихся разрезов, поделим на 11 равных частей. Будет проведено 10 новых разрезов. Всего будет $17 + 10 = 27$ разрезов, значит, и 27 частей.

Докажем, что в любом случае будет не менее 27 частей.

Пусть ожидается, что либо придёт 11 человек, либо 17 абсолютно других людей. Пирог поделен на N частей, хозяйка про каждый кусок знает, кому он достанется.

Будем считать друзьями любых двоих из $11 + 17 = 28$ человек, которым достанется один и тот же кусок. Также будем считать, что друг моего друга — мой знакомый.

Рассмотрим группу, в которой любые двое друзья или знакомые. Пусть в ней A человек из 11 гостей и B человек из 17 гостей. Они претендуют на одну и ту же часть пирога, доля которого равна $A/11 = B/17$. Тогда $17A = 11B$. Тогда A кратно 11, число B кратно 17, то есть $A = 11$, $B = 17$. Значит, эта группа — все планируемые гости.

Тогда можно взять любого гостя и смотреть, как остальные 27 человек стали его друзьями или знакомыми. С каждым куском число друзей или знакомых возрастает на 1, значит, надо не менее 27 кусков.

9. В 6 «Б» классе 27 человек. Семеро на перемене играли в футбол — это $1/9$ всех девочек и треть всех мальчиков. Сколько мальчиков в 6 «Б» классе?

Ответ: 18.

Решение (перебор). Девочек не более 27, тогда играли 1, 2 или 3 девочки. Вариант 3 девочек не подходит (мальчиков нет). Если играли 2 девочки, то играли 5 мальчиков, всего в классе $18 + 15 = 33$ ученика (противоречие). Если играла 1 девочка, то играли 6 мальчиков, всего в классе $9 + 18 = 27$ учеников (подходит).

Решение (уравнение). Если играли n мальчиков, то играли $7 - n$ девочек, в классе $3n + 9(7 - n) = 27$ учеников, откуда $3n + 63 - 9n = 27$, $n = 6$, в классе $3n = 18$ мальчиков.

10. Тиме и Лёне дали по прямоугольному листу бумаги и попросили измерить их ширину, длину, периметр и площадь. Оказалось, что у листа Тимы ширина больше на 25%, чем у листа Лёни, а периметр листа Тимы на 20% больше периметра листа Лёни.

Какие из следующих утверждений про площади листов верные?

- (1) Площадь листа Тимы может быть больше площади листа Лёни.
- (2) Площади листов Тимы и Лёни могут быть равны.
- (3) Площадь листа Тимы может быть меньше площади листа Лёни.

Ответ: 1, 2 и 3.

Решение. Каждый из вариантов возможен. Нетрудно проверить, что удовлетворяют условию, например, такие прямоугольники:

- (1) у Лени 120×20 , у Тимы 150×18 ;
- (2) у Лени 20×160 , у Тимы 16×200 ;
- (3) у Лени 20×200 , у Тимы 14×250 .

Комментарий. Откуда берутся такие примеры?

Если у Лёни лист ширины $4a$ и полупериметра $5p$, то у Тимы лист ширины $5a$ и полупериметра $6p$. Площади равны соответственно $4a(5p - 4a)$ и $5a(6p - 5a)$. Достаточно сравнить $4(5p - 4a)$ и $5(6p - 5a)$, $20p - 16a$ и $30p - 25a$, $9a$ и $10p$.

При $a = 40$, $p = 36$ имеем $9a = 10p$ и равенство площадей, при этом прямоугольник Лёни — 20×160 , прямоугольник Тимы — 16×200 .

Также можно подобрать, чтобы $9a < 10p$ и $9a > 10p$.

11. Маша испекла гостям 9 одинаковых пирогов. Маша и каждый из гостей съели по $3/8$ пирога. Сколько было гостей?

Ответ: 23.

Решение. Если пирог ели n человек, то $3n/8 = 9$, откуда $n = 24$. Значит, кроме Маши пирог ели еще 23 гостя.

12. Сейчас Тиме 3 года, Лёне 9 лет. Через несколько лет Лёня может быть старше Тимы ровно (1) в 4 раза, (2) в 3 раза, (3) в 2 раза, (4) в полтора раза, (5) на треть от своего возраста. Какие из указанных вариантов возможны?

Ответ: 3, 4 и 5

Решение. Такое возможно, если уравнения имеют натуральный корень:

- (1) $4(N + 3) = N + 9$,
- (2) $3(N + 3) = N + 9$,
- (3) $2(N + 3) = N + 9$,
- (4) $1,5(N + 3) = N + 9$,
- (5) $N + 3 = 2/3(N + 9)$.

В (1) и (2) таких корней нет, в (3) корень $N = 3$, в (4) и (5) корень $N = 9$.

13. Пятиклассник Рома выписал все натуральные числа от 1 до N , отметил из них те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Сколько значений N от 1 до 100, при которых доля отмеченных чисел меньше $1/3$?

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что среди любых 6 подряд идущих натуральных чисел указанная доля равна $1/3$, так как среди них 2 числа, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Значит, для любого $N = 6k$ доля равна $(2k) : (6k) = 1/3$.

Для $N = 6k - 1$ доля $(2k) : (6k - 1) > 1/3$, так как убрали одно число, кратное 3.

Для $N = 6k - 2$ доля $(2k - 1) : (6k - 2) < 1/3$, так как убрали одно число, которые не делятся ни на 2, ни на 3.

Аналогично, для $N = 6k - 3$ доля $(2k - 1) : (6k - 3) = 1/3$, для $N = 6k - 4$ доля $(2k - 1) : (6k - 4) > 1/3$, для $N = 6k - 5$ доля $(2k - 1) : (6k - 5) > 1/3$.

Подходят только числа вида $N = 6k - 2$. Получаем $1 \leq 6k - 2 \leq 100, 1 \leq k \leq 17$, всего 17 чисел.

14. Тиме и Лёне дали по прямоугольному листу бумаги и попросили измерить их ширину, длину и площадь. Оказалось, что ширина листа Тимы на 25% больше, чем ширина листа Лёни, длина листа Тимы меньше длины листа Лёни на её треть. Площадь листа Тимы на 6 кв. см меньше площади листа Лёни. Сколько кв. см составляет площадь листа Лёни?

Ответ: 36.

Решение 1. Разделим лист Тимы на равные прямоугольники, образующие 5 горизонтальных рядов и 2 вертикальных ряда. Тогда его лист 2×5 , а лист Лёни имеет размеры 3×4 . Из условия 6 кв. см составляют $3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$ части, то есть 1 часть — 3 кв. см. Площадь листа Лёни $(3 \cdot 4) \cdot 3 = 36$ кв. см.

Решение 2. Если лист Лёни $a \times b$, то у Тимы $1,25a \times 2b/3$. Площадь у Тимы $2,5ab/3$, что меньше площади Лёни на $0,5ab/3 = ab/6 = 6$, откуда $ab = 36$.

15. У Ани и Вани шаги равной длины. Аня отошла по тропинке от костра на 20 шагов, Ваня — на 2 шага. Они сделали по N шагов, после чего Аня оказалась втрое дальше от костра, чем Ваня. Чему равно N ?

Ответ: 7.

Решение. Из условия $20 + N = 3(2 + N)$, откуда $20 + N = 6 + 3N, 2N = 14, N = 7$.