Блок 2. Комбинаторика

Условия задач

1. На балу собрались 5 дам и 7 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на 5 пар «кавалер + дама»?

2. Коля считает число *разнообразным*, если в его записи все цифры различны. Он выписал в порядке возрастания все трехзначные *разнообразные* числа. Какое по счету в этом списке число 897?

3. Пятеро ребят, две девочки и трое мальчиков пошли в кинотеатр на один сеанс фильма «Страсти по комбинаторике. Начало». Они купили 5 билетов на 5 подряд идущих мест в одном ряду. Сколькими способами они могут занять свои места?

4. Пятеро ребят, две девочки и трое мальчиков пошли в кинотеатр на один сеанс фильма «Страсти по комбинаторике. Взрыв». Они купили 5 билетов на 5 подряд идущих мест в одном ряду. Сколькими способами они могут занять свои места, если девочки не хотят сидеть на соседних местах?

5. Сколькими способами по кругу можно расставить одну двойку, две единицы и 10 нулей? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

6. Сколькими способами по кругу можно расставить 3 нолика и 6 крестиков? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

7. Сколькими способами по кругу можно расставить 3 нолика и 7 крестиков? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

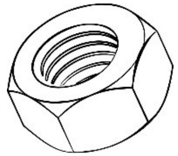
8. Федот пришёл в лавку Фёдора за тыквами и арбузами. В продаже есть 4 разные тыквы и 5 разных арбузов. Федот собирается купить 1 товар одного вида и 2 товара другого вида. Сколькими способами он может это сделать?

9. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Сколькими способами Тимофей может включить несколько (возможно, одну) из них?

10. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Когда он хочет, чтобы освещение было хорошим, он включает не менее 5 ламп. Сколькими способами Тимофей может включить лампы, чтобы комната была хорошо освещена?

11. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Когда он хочет, чтобы освещение было средним, он включает от 3 до 5 ламп. Сколькими способами Тимофей может включить лампы, чтобы комната была средне освещена?

12. Современный художник Григорий решил сделать серию произведений искусства — раскрашенных гаек. У него есть много одинаковых гаек, каждая имеет 6 боковых граней. Каждую из них Григорий красит в один из трёх цветов: белый, красный или голубой. Любые две соседние грани он делает разного цвета. Сколько таких разных произведений искусства может сделать Григорий?



Для гайки не обязательно использовать все три цвета. Раскраски одинаковы, если гайки можно повернуть (перевернуть) так, что они будут окрашены одинаково.

13. У числа 2012 сумма цифр равна 5. Петя решил выписать все четырехзначные числа с такой же суммой цифр (включая само число 2012). Сколько чисел он напишет?

14. По кругу стоят 100 гномов. У каждого есть несколько золотых слитков. Когда гнома спрашивают, сколько у него слитков, он этого не отвечает. Но за то он говорит одно число — сколько в сумме слитков у ближайших 10 гномов, стоящих слева от него, и у 10 гномов, стоящих справа от него. Трандуил спросил каждого из 100 гномов и сложил те 100 чисел, которые ему сказали. Во сколько раз полученная сумма больше общего количества золотых слитков, которые есть у данных 100 гномов?

15. На двух параллельных прямых отмечены 20 точек, по 10 на каждой. Сколькими способами можно провести два пересекающихся отрезка с концами в отмеченных точках?

16. В ряд выписаны все такие пятизначные числа, в записи которых используются только цифры 5 и 7. Сколько раз выписана цифра 5?

17. В ряд выписаны все такие шестизначные числа, в записи которых используются только цифры 0 и 1. Сколько раз выписана цифра 1?

18. В ряд выписаны все такие пятизначные числа, в записи которых используются только цифры 1 и 2. Чему равна сумма этих чисел?

Блок 2. Комбинаторика

Указания, ответы и решения

Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемым при решении.

Обратите внимание, что есть блоки задач, объединенные одним сюжетом. Это № 3-4, №5-7, № 9-11, № 16-18. Некоторые задания — прямые аналоги задач подготовительного занятия.

К некоторым задачам указано разные способы решения. Полезно понять их все, так как они дают разные алгоритмы подсчета.

1. На балу собрались 5 дам и 7 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на 5 пар «кавалер + дама»?

   Ответ: 2520.

   Решение. Пронумеруем дам. Первая дама выбирает кавалера 7 способами, вторая — 6, …, последняя — 3. Итого $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ способов.

   Комментарий. Аналогичная задача предлагалась в подготовительном занятии.

   Замечание 😊. Найдите ошибку в следующих рассуждениях.

   Пронумеруем дам. Первая дама выбирает кавалера 7 способами, вторая — 6, …, последняя — 3. Итого $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ вариантов. Так как дам можно пронумеровать $5! = 120$ способами, то каждый способ в 2520 вариантах присутствует 120 раз. Итого $2520 : 120 = 21$ способ.

   Ошибка в том, что так мы считаем всех дам неразличимыми. Тогда не важно, с кем из дам танцует каждый из кавалеров. Число таких вариантов — количество способов выбрать двух кавалеров, не участвующих в танцах. Это число как раз равно $7 \cdot 6 : 2 = 21$.

   Кстати, такими рассуждениями, число вариантов собрать 5 пар из 5 дам и 5 кавалеров равно $5! : 5! = 1$, что явно неверно.

2. Коля считает число *разнообразным*, если в его записи все цифры различны. Он выписал в порядке возрастания все трехзначные *разнообразные* числа. Какое по счету в этом списке число 897?

   Ответ: 576.

   Решение. Заметим, что число 897 — наибольшее из тех, у которых первая цифра не 9.

   Найдём количество трёхзначных чисел, цифры которых различны, а первая цифра не 9. Первую цифру можно выбрать 9 способами (любая, кроме 0 и 9), вторую — 9 способами (любая, кроме использованной на 1 месте), третью — 8 способами (любая, кроме двух уже использованных). Итого $8 \cdot 9 \cdot 8 = 576$.

   Замечание. Также можно было найти общее количество трёхзначных чисел с разными цифрами ($9 \cdot 9 \cdot 8$ штук) и вычесть из него количество таких чисел, начинающихся с 9, ($1 \cdot 9 \cdot 8$ штук). Итог: $9 \cdot 9 \cdot 8 - 1 \cdot 9 \cdot 8 = 576$.

3. Пятеро ребят, две девочки и трое мальчиков пошли в кинотеатр на один сеанс фильма «Страсти по комбинаторике. Начало». Они купили 5 билетов на 5 подряд идущих мест в одном ряду. Сколькими способами они могут занять свои места?

   Ответ: 120.

   Решение. Первый может выбрать себе место 5 способами, второй — 4, …, последняя — 1. Итого $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

4. Пятеро ребят, две девочки и трое мальчиков пошли в кинотеатр на один сеанс фильма «Страсти по комбинаторике. Взрыв». Они купили 5 билетов на 5 подряд идущих мест в одном ряду. Сколькими способами они могут занять свои места, если девочки не хотят сидеть на соседних местах?

   Ответ: 72.

   Решение. Перебором нетрудно перечислить способы распределения мест между мальчиками и девочками: ДМДММ, ДММДМ, ДМММД, МДМДМ, МДММД, ММДМД. В каждом из них девочек можно посадить 2 способами, а мальчиков — $3! = 6$ способами. Итого $6 \cdot 2 \cdot 3! = 72$ способа.

   Замечание. Можно также из общего числа способов рассадки ($5!$ штук) вычесть те варианты, когда девочки сидят рядом (4 пары соседних мест, в каждом $2 \cdot 3!$ рассадок). Итого: $5! - 4 \cdot 2 \cdot 3! = 120 - 48 = 72$.

5. Сколькими способами по кругу можно расставить одну двойку, две единицы и 10 нулей? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

   Ответ: 66.

   Решение. Поставим цифру 2 — это можно сделать 1 способом, так как все варианты совмещаются поворотом. Осталось $10 + 2 = 12$ мест, из которых надо выбрать два для единиц (остальные места займут нули). Всего $12 \cdot 11 : 2 = 66$ способов.

6. Сколькими способами по кругу можно расставить 3 нолика и 6 крестиков? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

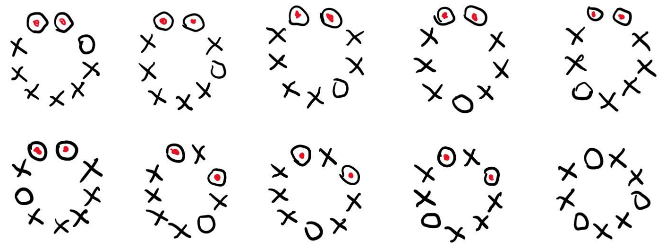
Ответ: 10.

Решение 1 (подсчёт). Повернем так, чтобы вверху стоял нолик. Тогда из остальных 6 + 2 = 8 мест надо выбрать два места для ноликов — это 8 · 7 : 2 = 28 способов.

Заметим, что если какой-то способ совпадает сам с собой при повороте, то между любыми двумя соседними ноликами поровну крестиков. Такой вариант один.

Каждый из остальных 27 способов посчитан трижды, так как первым мог быть любой из трёх ноликов. Значит, всего 27 : 3 + 1 = 10 способов.

Решение 2 (перебор). Можно получить результат, организовав перебор. Например, сначала можно перебрать варианты с двумя рядом стоящими ноликами. Затем те, где есть два нолика, между которыми один крестик; далее — когда 2 крестика. Итог показан на рисунке.



7. Сколькими способами по кругу можно расставить 3 нолика и 7 крестиков? Варианты, которые можно совместить поворотом (но <u>не</u> переворотом), считаются одинаковыми.

Ответ: 12 способов.

Решение. Повернем так, чтобы вверху стоял нолик. Тогда из остальных 7 + 2 = 9 мест надо выбрать два места для ноликов — это 9 · 8 : 2 = 36 способов.

Заметим, что если какой-то способ совпадает сам с собой при повороте, то между любыми двумя соседними ноликами поровну крестиков. Такое невозможно.

Каждый из остальных 36 способов посчитан трижды, так как первым мог быть любой из трёх ноликов. Значит, всего 36 : 3 = 12 способов.

Замечание. Полезно организовать перебор и нарисовать все способы. Сделайте это самостоятельно.

8. Федот пришёл в лавку Фёдора за тыквами и арбузами. В продаже есть 4 разные тыквы и 5 разных арбузов. Федот собирается купить 1 товар одного вида и 2 товара другого вида. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 70.

Решение (способ 1). Федот купил 1 тыкву и 2 арбуза или 2 тыквы и 1 арбуз.

Выбрать 2 арбуза можно 5 · 4 : 2 = 10 способами, поэтому купить 1 тыкву из 4 и 2 арбуза можно 4 · 10 = 40 способами.

Выбрать 2 тыквы можно 4 · 3 : 2 = 6 способами, поэтому купить 1 арбуз из 5 и 2 тыквы можно 5 · 6 = 30 способами.

Итого: 40 + 30 = 70 способов.

Решение (способ 2). Выберем сначала 1 арбуз и 1 тыкву: 4 · 5 = 20 способов. Добавим еще любой из 7 оставшихся овощей — 20 · 7 = 140 вариантов. Заметим, каждый вариант учтен дважды, так как одинаковые овощи могли выбрать в разном порядке. Всего 140 : 2 = 70 способов.

9. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Сколькими способами Тимофей может включить несколько (возможно, одну) из них?

Ответ: 127.

Решение. Про каждую лампу есть выбор: включать её или нет. Поэтому про все лампы есть 2^7 вариантов. Осталось исключить вариант, когда все лампы выключены. Получаем $2^7 - 1 = 127$ способов.

Комментарий. Аналогичная задача предлагалась в подготовительном занятии.

10. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Когда он хочет, чтобы освещение было хорошим, он включает не менее 5 ламп. Сколькими способами Тимофей может включить лампы, чтобы комната была хорошо освещена?

Ответ: 29.

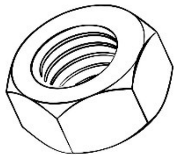
Решение. Освещение хорошее, если не горят 0, 1 или 2 лампы из 7 — это 1 + 7 + 7 · 6 : 2 = 29 вариантов.

11. В доме у программиста Тимофея комната освещается 7 лампами, расположенными в ряд. Когда он хочет, чтобы освещение было средним, он включает от 3 до 5 ламп. Сколькими способами Тимофей может включить лампы, чтобы комната была средне освещена?

Ответ: 91.

Решение. Если горит мало ламп, то горят 0, 1 или 2 лампы. Это $1 + 7 + 7 \cdot 6 : 2 = 29$ вариантов. Если горит много ламп, то не горит 0 или 1 лампа — это $1 + 7 = 8$ вариантов. Всего $2^7 = 128$ вариантов. Значит, искомых $128 - 29 - 8 = 91$.

12. Современный художник Григорий решил сделать серию произведений искусства — раскрашенных гаек. У него есть много одинаковых гаек, каждая имеет 6 боковых граней. Каждую из них Григорий красит в один из трёх цветов: белый, красный или голубой. Любые две соседние грани он делает разного цвета. Сколько таких разных произведений искусства может сделать Григорий?

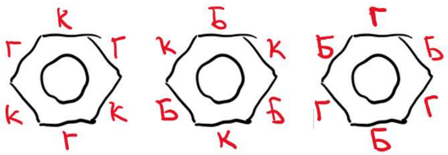


Для гайки не обязательно использовать все три цвета. Раскраски одинаковы, если гайки можно повернуть (перевернуть) так, что они будут окрашены одинаково.

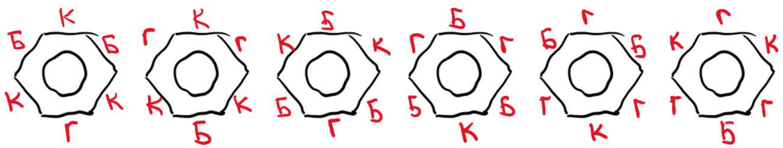
Ответ: 13.

Решение. Грани одного цвета не могут быть рядом, поэтому их не более трёх. Разберем три случая.

(1) Если использованы только два цвета, то грани этих цветов чередуются. Таких вариантов столько, сколько пар данных цветов, то есть 3 штуки.



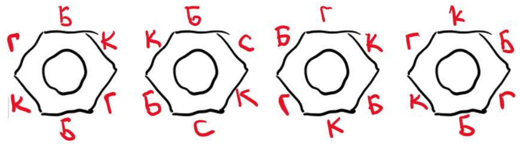
(2) Пусть использовано 3 цвета, при этом один из них — 3 раза. Тогда один из оставшихся — 2 раза, а третий цвет — 1 раз. Схема раскраски (с точностью до поворота) только одна: 121213. В качестве цвета 1 можно взять любой из трёх данных цветов, в качестве цвета 2 — любой из двух оставшихся. Итого: 6 типов гаек.



(3) Пусть использовано 3 цвета, при этом каждый не более 2 раз. Тогда каждый цвет использован 2 раза.

Если любые две противоположные грани окрашены одинаково, то такая окраска одна.

Если какие-то противоположные грани окрашены в разные цвета 1 и 2, то вторая грань цвета 1 находится рядом с первой гранью цвета 2 и наоборот. Тогда грани цвета 3 расположены напротив друг друга. Есть 3 варианта, которые отличаются тем, какого цвета одноцветные противоположные грани.



Всего $3 + 6 + 1 + 3 = 13$ типов.

13. У числа 2012 сумма цифр равна 5. Петя решил выписать все четырехзначные числа с такой же суммой цифр (включая само число 2012). Сколько чисел он напишет?

Ответ: 35.

Решение. Переберем такие числа по наибольшей цифре.

(1) Если она 5, то это одно число 5000.

(2) Если наибольшая цифра 4, то число получается перестановкой цифр в числе 4100. Таких чисел 6 штук: 4100, 4010, 4001 и 1400, 1040 и 1004.

(3) Если наибольшая цифра 3, то число получается перестановкой цифр в числе 3200 или 3110. Из 3200 получается 6 чисел (аналогично случаю 2). Из 3110 получается 9 чисел: если первая цифра 3, то остальные цифры дают 3 перестановки, если первая цифра 1, то оставшиеся 3 разные цифры дают $3! = 6$ перестановок.

(4) Если наибольшая цифра 2, то число получается перестановкой цифр в числе 2210 или 2111. Из 2210 получатся 9 чисел (как в предыдущем случае). Из 2111 получается 4 числа: 2111, 1211, 1121 и 1112.

Всего $1 + 6 + 6 + 9 + 9 + 4 = 35$ чисел.

14. По кругу стоят 100 гномов. У каждого есть несколько золотых слитков. Когда гнома спрашивают, сколько у него слитков, он этого не отвечает. Но за то он говорит одно число — сколько в сумме слитков у ближайших 10 гномов, стоящих слева от него, и у 10 гномов, стоящих справа от него. Трандуил спросил каждого из 100 гномов и сложил те 100 чисел, которые ему сказали. Во сколько раз полученная сумма больше общего количества золотых слитков, которые есть у данных 100 гномов?

Ответ: 20.

Решение. Количество слитков каждого гнома входит в суммы, которые говорят 10 его соседей справа и 10 соседей слева. Значит, полученная сумма в 20 раз больше общего количества золотых слитков.

15. На двух параллельных прямых отмечены 20 точек, по 10 на каждой. Сколькими способами можно провести два пересекающихся отрезка с концами в отмеченных точках?

Ответ: 2025.

Решение. Выберем 2 отмеченные точки на одной прямой и 2 отмеченные точки на другой прямой. Каждую пару можно выбрать $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способами, значит, 2 пары можно выбрать $45 \cdot 45 = 2025$ способами. Остается заметить, что когда выбраны концы отрезков, то пересекающиеся отрезки можно провести однозначно.

16. В ряд выписаны все такие пятизначные числа, в записи которых используются только цифры 5 и 7. Сколько раз выписана цифра 5?

Ответ: 80.

Решение. Из двух разных цифр можно составить 5-значное число $2^5 = 32$ способами. В 32 числах $32 \cdot 5 = 160$ цифр. Не трудно понять, что цифр 5 и 7 поровну. Значит, цифра 5 выписана $160 : 2 = 80$ раз.

17. В ряд выписаны все такие шестизначные числа, в записи которых используются только цифры 0 и 1. Сколько раз выписана цифра 1?

Ответ: 112.

Решение. Первая цифра любого такого числа — 1. Остальные 5 цифр можно записать $2^5 = 32$ способами. Всего этих цифр $32 \cdot 5 = 160$, цифр 1 и 0 поровну. Значит, цифра 1 выписана $160 : 2 + 32 = 112$ раз.

18. В ряд выписаны все такие пятизначные числа, в записи которых используются только цифры 1 и 2. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 533328.

Решение. Из двух разных цифр можно составить 5-значное число $2^5 = 32$ способами. На каждой позиции поровну цифр 1 и 2. Значит, в каждом разряде сумма цифра равна $(1 + 2) \cdot 16 = 48$. Тогда сумма всех чисел равна
$48 \cdot 10000 + 48 \cdot 1000 + 48 \cdot 100 + 48 \cdot 10 + 48 = 48 \cdot 11111 = 533328$.