Блок 3. Логика

Подготовительное занятие

- В 7 «М» классе 27 учеников. В расписании у них есть 5 уроков алгебры, 3 урока геометрии, 3 урока физики и 2 урока информатики. Истинны или ложны следующие утверждения про 7 «М» класс?

  (а) Каждую неделю уроков алгебры больше, чем уроков физики и информатики, и меньше, чем уроков геометрии и литературы.

  (б) В классе мальчиков больше, чем девочек, или девочек больше, чем мальчиков.

  (в) Если уроков физики больше, чем уроков геометрии, то уроков информатики больше, чем уроков алгебры.

- Учитель математики про 7 «М» класс сделал 4 утверждения:
  (а) «Все ученики класса ленивые»,
  (б) «Некоторые ученики не чистят зубы по утрам»,
  (в) «Все они не любят уроки математики»,
  (г) «Более трети из них — с айфонами».

  Все знают, что это неправда. Что тогда верно? Для каждого из пунктов сформулируйте верные утверждения.

1. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь,» — подумал Петя. Прав ли он?

2. (а) Сколько натуральных чисел N, про которые утверждение «N больше 20» неверно?

   (б) Сколько натуральных чисел N, для которых не верно утверждение «число N больше 20 или нечетно»?

3. У входа в школу появилось объявление: «Директор категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за прическами». Может ли теперь Петя покрасить волосы в красный цвет без риска быть отчисленным из школы?

4. Сформулируйте отрицания следующих утверждений:
   (а) Все школьники хотя бы раз бывали в библиотеке.
   (б) Все семиклассники умные и добрые.
   (в) Некоторые кошки больные.
   (г) Существует семиклассник, который не может правильно сложить никакие две дроби.
   (д) Для любого семиклассника можно подобрать такую задачу, что никакую более сложную задачу он не сможет решить.
   (е) Если семиклассник грустный, то он не сдал задачу или у него нет кошки.

   Упростите свои фразы, избавляясь от сочетаний «не существует» и «не для всех».

5. (а) Про двузначное число одна из фраз «Первая цифра чётная» и «Вторая цифра менее 5» верна, а другая ложна. Сколько двузначных натуральных чисел, с которыми такое могло произойти?

   (б) Сколько двузначных чисел, про которых не верны оба из утверждений «в этом числе есть цифра 0 и нет нечетных цифр» и «в этом числе есть цифра 5 или нет цифры 3»?

   (в) Даны два утверждения: «В этом числе нет двойки или тройки», «В этом числе нет семерки и пятерки». Напишите наибольшее трехзначное число, для которого оба утверждения не верны.

6. Все задачи в тесте имеют ответы, пронумерованные буквами A, B, C, D, E и только один ответ верный. Решая одну из задач теста, Коля обнаружил следующее: если ответ A верен, то и ответ B тоже верен; если ответ C неверен, то и ответ B неверен; если ответ B неверен, то оба ответа D и E неверны. Какой ответ верный?

7. Даны следующие утверждения:
   (1) Джо — ловкач;
   (2) Джо не везет;
   (3) Джо — ловкач, но ему не везет;
   (4) Если Джо — ловкач, то ему не везет;
   (5) Джо — ловкач тогда и только тогда, когда ему везет;
   (6) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.
   Какое наибольшее число из данных шести утверждений может быть истинно?

Блок 3. Логика

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие нацелено на изучение логических операций отрицания, «и» (конъюнкция), «или» (дизъюнкция), «если… то» (импликация). Предлагается научиться определять истинность сложно построенных утверждений.

Также предлагается на примерах этих задач продемонстрировать, как разные фразы представляются в виде отдельных утверждений, связанных логическими операциями. Так сделано, например, в комментарии к задаче № 1.

Первая часть занятия — обсуждение заданий, при котором рассматриваются логические операции и условия их истинности. Далее — построение отрицаний к данным утверждениям. Вторая часть занятия — задания для самостоятельного решения.

Задания для обсуждения с учениками.

- В 7 «М» классе 27 учеников. В расписании у них есть 5 уроков алгебры, 3 урока геометрии, 3 урока физики и 2 урока информатики. Истинны или ложны следующие утверждения про 7 «М» класс?
  (а) Каждую неделю уроков алгебры больше, чем уроков физики и информатики, и меньше, чем уроков геометрии и литературы.
  (б) В классе мальчиков больше, чем девочек, или девочек больше, чем мальчиков.
  (в) Если уроков физики больше, чем уроков геометрии, то уроков информатики больше, чем уроков алгебры.

  (а) Ответ: неверное.

  Решение. Утверждение из двух условий, связанных союзом «и», верное, если верны оба условия «уроков алгебры больше, чем уроков физики и информатики», «уроков алгебры меньше, чем уроков геометрии и литературы».

  Первое утверждение неверное (их поровну, 5 = 3 + 2). Независимо от количества уроков литературы всё утверждение неверно.

  (б) Ответ: верное.

  Решение. Утверждение из двух условий, связанных союзом «или», верное если верно хотя бы одно условие. Всего в классе нечётное число учеников, поэтому мальчиков и девочек не поровну. То есть, мальчиков больше или девочек больше. Значит, одно из утверждений, связанных «или», верное. Поэтому всё утверждение верно.

  (в) Ответ: верное.

Решение. Утверждение из двух условий, связанных конструкцией «если…, то», неверное, если и только если первое условие верно, а второе — нет.

Фраза «уроков физики больше, чем уроков геометрии» неверна (их поровну). Поэтому всё утверждение верно.

Комментарий. В математике принято утверждения, про которые однозначно можно понять, верные они или нет, принято обозначать латинскими буквами, как переменные. Если утверждение A верно, то считается $A = 1$, если ложно, то $A = 0$.

Отрицание обозначают значком $\neg$. Операцию «и» (конъюнкцию) обозначают значком $\wedge$, «или» (дизъюнкцию) — значком $\vee$, «если… то» (импликацию) — значком $\rightarrow$.

На основе обсуждения задания, предложите ученикам заполнить таблицу результатов этих логических операций.

A	B	$\neg$A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\rightarrow$ B
0	0				
1	0				
0	1				
1	1				

Заполненная таблица выглядит так:

A	B	$\neg$A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\rightarrow$ B
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

Часто путают выводы про утверждения с импликацией «если… то». Легче действие этой операции запомнить так: «из лжи следует что угодно, а из правды — только правда». Например, верная фраза «если число 1 — простое, то черти существуют» (утверждение «число 1 — простое» неверно, поэтому фраза верная независимо от того, существуют черти или нет).

Нужно уметь не только определять связки с одной логической операцией. Предложите ученикам заполнить такую таблицу:

A	B	(A $\vee$ B) $\wedge$ B	(A $\wedge$ B) $\rightarrow$ B
0	0		
1	0		
0	1		

1	1		

Удобно в таблицу сначала вписать результаты для $A \vee B$ и $A \wedge B$. Заполненная таблица выглядит следующим образом.

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge B$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to B$
0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что $(A \vee B) \wedge B = B$, $(A \wedge B) \to B = 1$ (всегда верно).

- Учитель математики про 7 «М» класс сделал 4 утверждения:
  (а) «Все ученики класса ленивые»,
  (б) «Некоторые ученики не чистят зубы по утрам»,
  (в) «Все они не любят уроки математики»,
  (г) «Более трети из них — с айфонами».

  Все знают, что это неправда. Что тогда верно? Для каждого из пунктов сформулируйте верные утверждения.

  (а) Решение. Найдется школьник, для которого не верно, что он очень ленивый. То есть «Найдется не очень ленивый школьник»

  (б) Решение. Ни про каких школьников не правда, что они не чистят зубы по утрам. То есть верно, что «все школьники чистят зубы по утрам».

  (в) Решение. Не про всех семиклассников верно, что они не любят уроки математики. То есть «Найдётся семиклассник, который любит уроки математики».

  (г) Решение. Про семиклассников с айфонами неверно, что их больше трети. Значит, их не больше, то есть треть или меньше: «Семиклассников с айфонами треть или меньше» или «Семиклассников с айфонами не более трети».

  Комментарий. Обратите внимание, если утверждение «про всех», то отрицание говорит, что «найдётся хотя бы один». И наоборот, если утверждение «найдётся кто-то», то отрицание говорит «про всех».

1. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь,» — подумал Петя. Прав ли он?

   Ответ: не прав.

   Решение. Кот Пети может чихать каждый день, независимо от дождя. Поэтому указанный вывод, сделанный Петей, неверен.

   Комментарий. Разберемся подробнее, о чём данная задача.

В условии дано утверждение «если идёт дождь, то вчера кот чихал». В задаче спрашивается, верно ли следующий вывод Пети: «если кот сегодня чихнул, то завтра будет дождь».

Пусть утверждение A — «сегодня идёт дождь», утверждение B — «вчера кот чихнул». Рассмотрим таблицу.

A	B	$A \to B$	$B \to A$
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Видно, что оба утверждения верные, если $A = B = 1$ (кот чихал и шёл дождь) или $A = B = 0$ (ни кто не чихал, ни дождя не было). А единственная ситуация, опровергающая вывод Пети, как раз приводится в решении: $A = 0$ (дождя нет), $B = 1$ (… а кот вчера чихал).

2. (а) Сколько натуральных чисел N, про которые утверждение «N больше 20» неверно?

   (б) Сколько натуральных чисел N, для которых не верно утверждение «число N больше 20 или нечетно»?

   (а) Ответ: 20.

   Решение. Если для числа N утверждение «N больше 20» не верно, то верно «N не больше 20». Значит, подходят числа от 1 до 20, их 20 штук.

   Комментарий. Обратите внимание, что отрицанием к «N больше 20» не является «N меньше 20». Это нужно обсудить, так как тот же ответ можно получить, рассуждая неправильно. Например, из «N меньше 20» можно сделать вывод, что таких значений N ровно 20. Также можно ошибочно считать, что число «0» является натуральным.

   (б) Ответ: 10.

   Решение. Неверна следующая связка: «N больше 20» или «N — нечетно». Связка с «или» не верная только если неверны оба утверждения.

   Значит, нужно найти количество чисел, для которых верно «N не больше 20» и «N — четно». Под первое подходят только числа от 1 до 20, из них чётных — 10 штук.

3. У входа в школу появилось объявление: «Директор категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за прическами». Может ли теперь Петя покрасить волосы в красный цвет без риска быть отчисленным из школы?

   Ответ: можно.

Решение. Пусть А — утверждение «Пете можно покрасить волосы».
(1) Если есть контроль за прическами, то верно «не А» или, как обозначают в математике, $\neg$А.
(2) Запрет контроля — это $\neg(\neg A)$.
(3) Отмена решения о запрете — это $\neg(\neg(\neg A))$.
(4) Возражение против отмены — это $\neg(\neg(\neg(\neg A)))$.
Если отрицать А чётное число раз — всё равно, что утверждать А. Значит, $\neg(\neg(\neg(\neg A))) = A$. Если объявление говорит А, то Пете можно красить волосы.

4. Сформулируйте отрицания следующих утверждений:
(а) Все школьники хотя бы раз бывали в библиотеке.
(б) Все семиклассники умные и добрые.
(в) Некоторые кошки больные.
(г) Существует семиклассник, который не может правильно сложить никакие две дроби.
(д) Для любого семиклассника можно подобрать такую задачу, что никакую более сложную задачу он не сможет решить.
(е) Если семиклассник грустный, то он не сдал задачу или у него нет кошки.

Упростите свои фразы, избавляясь от сочетаний «не существует» и «не для всех».

Решение. Отрицания можно сформулировать, например, следующим образом.
(а) Существует школьник, никогда не бывавший в библиотеке.
(б) Существует злой или глупый семиклассник.
(в) Все кошки здоровые.
(г) У каждого семиклассника есть пара дробей, которую он может сложить.
(д) Есть семиклассник, для которого нельзя подобрать задачу, сложнее которой он не сможет решить.
(е) Грустные семиклассники сдали задачу и являются владельцами кошек.

5. (а) Про двузначное число одна из фраз «Первая цифра чётная» и «Вторая цифра менее 5» верна, а другая ложна. Сколько двузначных натуральных чисел, с которыми такое могло произойти?

(б) Сколько двузначных чисел, про которых не верны оба из утверждений «в этом числе есть цифра 0 и нет нечетных цифр» и «в этом числе есть цифра 5 или нет цифры 3»?

(в) Даны два утверждения: «В этом числе нет двойки или тройки», «В этом числе нет семерки и пятерки». Напишите наибольшее трехзначное число, для которого оба утверждения не верны.

(а) Ответ: 45.

Решение. Возможны два случая.

Утверждение 1 верно, утверждение 2 ложно. Тогда первая цифра 2, 4, 6 или 8 — 4 варианта. Вторая цифра не менее 5, то есть 5, 6, 7, 8 или 9 — 5 вариантов. Итого $4 \times 5 = 20$ чисел.

Утверждение 1 ложно, утверждение 2 верно. Тогда первая цифра 1, 3, 5, 7 или 9 — 5 вариантов. Вторая цифра менее 5, то есть 0, 1, 2, 3 или 4 — 5 вариантов. Итого $5 \times 5 = 25$ чисел.

Всего $20 + 25 = 45$ чисел.

(б) Ответ: 17.

Решение. Про число верны утверждения: «в этом числе нет цифры 0 или есть нечетная цифра» и «в этом числе нет цифры 5 и есть цифра 3».

Там нет 5 и есть 3, то есть нечетная есть, значит первое утверждение в условии уже не верно. Значит, дано число вида 3∗ (звездочка — любая цифра, кроме 5) или число вида ∗3 (звездочка — любая цифра, кроме 5 и 0). Первых чисел 9, вторых — 8. Всего $9 + 8 = 17$.

(в) Ответ. 732.

Решение. Построим отрицания к написанным утверждениям: «В этом числе есть двойка и (есть) тройка», «В этом числе есть семёрка или пятерка».

Значит, число состоит либо из цифр 2, 3, 5, либо из цифр 2, 3, 7. Наибольшее подходящее трехзначное число — 732.

6. Все задачи в тесте имеют ответы, пронумерованные буквами A, B, C, D, E и только один ответ верный. Решая одну из задач теста, Коля обнаружил следующее: если ответ A верен, то и ответ B тоже верен; если ответ C неверен, то и ответ B неверен; если ответ B неверен, то оба ответа D и E неверны. Какой ответ верный?

Ответ: C.

Решение (рассуждения). Если A — верный, то B — второй верный, что невозможно. Значит, A — неверный ответ.

Если C неверен, то неверные B, D и E. Тогда есть верных ответов нет, что невозможно.

Значит, C — верный ответ.

Решение (таблица). Для A, B, C, D, E есть 5 возможностей. В условии даны 3 утверждения: $A \to B$, $(\neg C) \to (\neg B)$, $(\neg B) \to ((\neg D) \wedge (\neg E))$. Можно заполнить таблицу.

A	B	C	D	E	$A \to B$	$(\neg C) \to (\neg B)$	$(\neg B) \to ((\neg D) \wedge (\neg E))$
1	0	0	0	0	0	1	1

0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0

Все три утверждения верные только в случае 3, когда верный ответ — С.

7. Даны следующие утверждения:
(1) Джо — ловкач;
(2) Джо не везет;
(3) Джо — ловкач, но ему не везет;
(4) Если Джо — ловкач, то ему не везет;
(5) Джо — ловкач тогда и только тогда, когда ему везет;
(6) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.
Какое наибольшее число из данных шести утверждений может быть истинно?

Ответ: 4.

Решение. Пусть утверждение А — «Джо — ловкач», утверждение В — «Джо везёт». Тогда данные утверждения таковы: (1) А, (2) $\neg$B, (3) $A \wedge (\neg B)$, (4) $A \to (\neg B)$. Утверждение (5) принято обозначать как $A \leftrightarrow B$. Утверждение (6) принято обозначать $A \oplus B$ (называют симметрической разницей).

Составим таблицы истинности для каждого пункта.

A	B	A	$\neg$B	$A \wedge (\neg B)$	$A \to (\neg B)$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	Всего
0	0	0	1	0	1	1	1	4
1	0	1	1	1	1	0	0	4
0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	3

В последнем столбце — количество верных утверждений. Наибольшее количество — четыре.