Блок 4. Графы и турниры

Подготовительное занятие

- В Липецкой области есть только такие маршруты автобусов между парами городами: Липецк–Грязи, Данков–Усмань, Задонск–Данков, Грязи–Елец, Усмань–Лебедянь, Чаплыгин–Грязи, Лебедянь–Задонск, Чаплыгин–Елец, Липецк–Чаплыгин. До каких городов области можно добраться (возможно, с пересадками) на автобусах из Липецка?
- Нарисуйте схемы (графы) к следующим ситуациям:

  (а) Маша дружит с Катей и Дашей, Даша дружит с Машей и Настей, Настя дружит с Дашей и Катей, Катя дружит с Машей и Настей;

  (б) у Олега есть 2 сына Петр и Василий, у Петра есть сыновья Николай, Григорий и Михаил;

  (в) между 9 планетами Солнечной системы летают ракеты по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон- Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран;

  (г) пять команд сыграли между собой круговой турнир, то есть каждая команды сыграла с каждой другой ровно один раз;

  (д) из всего набора домино у Оли на руках только 5 костей домино: 1-2, 5-2, 3-3, 5-3 и 2-6.
- В город Елец прилетела летающая тарелка с Марса. В ней трое пятируких марсиан, трое трехруких марсиан и шестеро двуруких марсиан.

  (а) Сколько всего рук у прилетевших марсиан?

  (б) Руки у марсиан длинные и изгибающиеся. Они все взялись за руки так, что не осталось свободных рук. Сколько получилось рукопожатий?

  (в)Могут ли они взяться все за руки, если пятируких марсиан не 3, а 4?
- Прошёл однокруговой шахматный турнир, в котором приняли участие 8 человек. В течение турнира каждые двое сыграли ровно одну партию. За победу игрок получал 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за проигрыш — 0 очков.
  (а) Сколько партий сыграл каждый участник?
  (б) Сколько прошло партий в течение всего турнира?
  (в) Какова сумма всех очков, проставленных в таблице?
  (г) Может ли оказаться, что последнее место занял игрок с 0 очками, а предпоследнее — игрок, заработавший только 0,5 очка?

1. На кружке по математике 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что в этой компании у Антона 6 друзей, у Бори — 5, у Вовы и Глеба — по 3, у Димы и Евгения — по 2, у Жоры — всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.
2. На концерте каждую песню исполняли двое артистов. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?
3. В некотором государстве 10 городов и 20 дорог. Авиалиния есть между двумя городами в том и только в том случае, если между ними нет дороги. Сколько авиалиний в таком государстве?
4. (а) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?
   (б) Можно ли придумать семь таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с пятью другими?
   (в) Можно ли разрезать прямоугольник 5×18 на доминошки так, чтобы каждая граничила ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины?
   (г) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
5. Вершины графа покрасили в два цвета: красный и синий. Из красных вершин есть ребра только в синие, а из синих — только в красные. Сумма степеней красных вершин — 20. Какой может быть сумма степеней синих?
6. На дискотеке было 6 девочек и 8 мальчиков. Каждая девочка станцевала с 4 мальчиками. Все мальчики танцевали с одинаковым количеством девочек. Со сколькими девочками танцевали мальчики?
7. Шесть команд в течение зимы должны сыграть однокруговой турнир. Болельщик Петя назвал число игр, которое каждая команда сыграла до Нового Года: 3, 3, 2, 2, 2, 1. Может ли такое быть или Петя ошибается?
8. В футбольном турнире пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?
9. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными.
   (а) Каких вершин больше — синих или зеленых?
   (б) Каким может быть наименьшее число синих и зеленых вершин такого графа?

Блок 4. Графы и турниры

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

В первой части занятия в процессе обсуждения задач, отмеченных точкой, можно ввести понятие графа и заметить простые закономерности, связанные с графами. Краткое изложение обсуждения приведено в комментариях к решениям. Также в комментарии вынесены факты, которые несут роль теории: определения (граф, степень вершины) и теоремы (количество ребер графа, четность суммы степеней вершин).

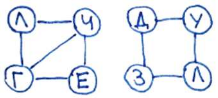
В задаче № 6 вводится понятие двудольного графа, который возникаем во многих текстовых задачах. Рекомендуем разобрать эту задачу во время занятия.

В набор включены задачи про турниры, каждый турнир можно воспринимать как граф, где вершины — команда, ребра — проведенные игры.

- В Липецкой области есть только такие маршруты автобусов между парами городами: Липецк–Грязи, Данков–Усмань, Задонск–Данков, Грязи–Елец, Усмань–Лебедянь, Чаплыгин–Грязи, Лебедянь–Задонск, Чаплыгин–Елец, Липецк–Чаплыгин. До каких городов области можно добраться (возможно, с пересадками) на автобусах из Липецка?

  Ответ: только до Грязей, Ельца и Чаплыгина.

  Решение. Схема связи между городами выглядит следующим образом.

  Комментарий. Города, связанные автобусными маршрутами, удобно изобразить в виде картинки. Заметим, что в картинке нам не важно взаимное расположение городов, длины дорог или их форма (прямые или нет). Важно: есть соединение или его нет.

  Именно такие схемы называют графами: объекты обычно изображают точками (это вершины графа), соединение изображают линиями (ребрами графа).

  Определение. *Граф* — множество вершин (точек), некоторые из которых соединены ребром (линией).

- Нарисуйте схемы (графы) к следующим ситуациям:

  (а) Маша дружит с Катей и Дашей, Даша дружит с Машей и Настей, Настя дружит с Дашей и Катей, Катя дружит с Машей и Настей;

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

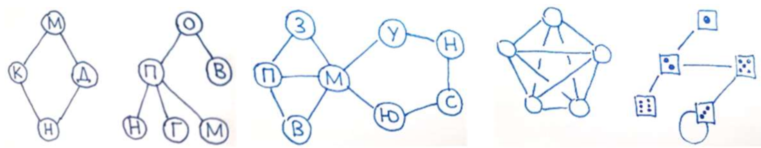
  (б) у Олега есть 2 сына Петр и Василий, у Петра есть сыновья Николай, Григорий и Михаил;

  (в) между 9 планетами Солнечной системы летают ракеты по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон- Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран;

  (г) пять команд сыграли между собой круговой турнир, то есть каждая команды сыграла с каждой другой ровно один раз;

  (д) из всего набора домино у Оли на руках только 5 костей домино: 1-2, 5-2, 3-3, 5-3 и 2-6.

  Ответ: см. рисунки.

  Указания. В пунктах (а)-(в) вершины и ребра очевидны.

  (г) вершины графа — команды, ребром соединены те, которые сыграли между собой.

  (д) вершины графа — количество очков (от 0 до 6), ребро — кость домино. Заметьте, что кость 3-3 изображается ребром, которое начинается и заканчивается в одной вершине. Такие ребра называют петлями.

  Комментарий. Графами можно иллюстрировать ситуации, где есть несколько объектов, между которыми бывает связь. В качестве вершин и ребер могут выступать, например: люди и дружба, города и дороги, люди и сыгранные игры. Какие еще примеры вы можете привести?

- В город Елец прилетела летающая тарелка с Марса. В ней трое пятируких марсиан, трое трехруких марсиан и шестеро двуруких марсиан.

  (а) Сколько всего рук у прилетевших марсиан?

  (б) Руки у марсиан длинные и изгибающиеся. Они все взялись за руки так, что не осталось свободных рук. Сколько получилось рукопожатий?

  (в)Могут ли они взяться все за руки, если пятируких марсиан не 3, а 4?

  Указание. Результат пункта (а) нужен для решения пункта (б), а способ решения пункта (б) — для решения пункта (в).

  (а) Ответ: $3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 36$.

(б) Ответ: 18.

Решение. В каждом рукопожатии участвует две руки, поэтому число рукопожатий вдвое меньше числа рук. Оно равно 36 : 2 = 18.

(в) Указание. Постарайтесь найти число рукопожатий в этом случае.

Ответ: не могут.

Решение. Допустим, это возможно. Тогда у марсиан $4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 41$ рук. Тогда число рукопожатий 41 : 2 = 20,5, что невозможно.

Комментарий 1. В данной задаче рисовать схему рукопожатий не нужно. Но речь идёт об объектах (марсианах), и связях между ними (есть рукопожатие или нет). Про каждую вершину такого графа известно число ребер, выходящих из неё.

Определение. *Степень вершины* графа — количество выходящих из нее ребер.

✓ Для каждого из графов в пунктах (а)-(д) предыдущей задачи найдите число вершин и число ребер. Около каждой вершины укажите её степень.

Комментарий 2. Пункт (б) иллюстрирует следующую закономерность.

Теорема (о подсчёте числа ребер). В любом графе сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер.

Доказательство 1. Число концов ребер равно сумме степеней вершин. Концы объединяются в пары. Поэтому число ребер вдвое меньше.

Доказательство 2. Если ребер нет, то всё верно. Каждое возникающее ребро увеличивает сумму степеней на 2, а число ребер — на 1.

Комментарий 3. Пункт (в) иллюстрирует следующую закономерность.

Теорема (о чётности суммы степеней вершин). В любом графе сумма степеней вершин чётна.

Доказательство. Так как сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, а число ребер — целое число, то сумма степеней чётна.

Можно не находить всю сумму степеней. Как известно, чётность суммы зависит от числа нечётных слагаемых. Поэтому, имеет место такое следствие.

Следствие. В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

- Прошёл однокруговой шахматный турнир, в котором приняли участие 8 человек. В течение турнира каждые двое сыграли ровно одну партию. За победу игрок получал 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за проигрыш — 0 очков.
(а) Сколько партий сыграл каждый участник?
(б) Сколько прошло партий в течение всего турнира?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

(в) Какова сумма всех очков, проставленных в таблице?
(г) Может ли оказаться, что последнее место занял игрок с 0 очками, а предпоследнее — игрок, заработавший только 0,5 очка?

Ответ: (а) 7, (б) 28, (в) 28.

Решение. Каждый игрок сыграл с 7 соперниками. Всего «участий» в партиях $7 \cdot 8 = 56$, в каждой партии реализуется два «участия», поэтому, число партий равно 56 : 2 = 28. Заметим, что в шахматном турнире после каждой игры между игроками распределяется 1 очко. Значит, сумма всех очков равна числу партий, то есть равна 28.

Комментарий 1. Каждый турнир можно изобразить графом, где команды (участники) — вершины, прошедшие игры — ребра. Значит, вопрос «сколько всего прошло игр» даёт тот же ответ, что и вопрос «сколько ребер в полном графе».

Комментарий 2. Обобщим результаты и будем их использовать при решении задач в дальнейшем. Если в круговом турнире n участников, то всего пройдёт $n(n-1)/2$ игр. При системе 1-0,5-0 будет распределено $n(n-1)/2$ очков, при системе 2-1-0 распределят $n(n-1)$ очков.

(г) Ответ: нет, такого не может быть.

Решение. В игре между последним и предпоследним распределяется 1 очко, значит, в сумме они должны набрать не 0,5 очков, а не менее 1 очка.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На кружке по математике 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что в этой компании у Антона 6 друзей, у Бори — 5, у Вовы и Глеба — по 3, у Димы и Евгения — по 2, у Жоры — всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.

   Решение. Антон дружит со всеми, а Жора только с одним человеком. Значит, Жора дружит только с Антоном.

   Боря дружит со всеми, кроме одного. Поскольку он точно не дружит с Жорой, то он дружит с Антоном, Вовой, Глебом, Димой и Евгением.

   Получается, что Дима и Евгений дружат с Антоном и Борей и больше ни с кем дружить не могут. Так как Глеб не дружит только с 3 людьми и это точно Жора, Дима и Евгений, то он дружит с остальными, а именно с Антоном, Борей и Вовой.

   Комментарий. Проиллюстрируйте приведенные рассуждения картинками самостоятельно.

2. На концерте каждую песню исполняли двое артистов. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

Ответ: 30.

Решение. Рассмотрим граф: артисты — его вершины, их совместные выступления — ребра. По условию в нём 12 вершин, степень каждой из них равна 5. Значит, количество ребер равно $12 \cdot 5 : 2 = 30$. Это и есть количество песен.

3. В некотором государстве 10 городов и 20 дорог. Авиалиния есть между двумя городами в том и только в том случае, если между ними нет дороги. Сколько авиалиний в таком государстве?

Ответ: 25.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — города, а ребра двух видом: синие — дороги, красные — авиалинии. Из каждого города выходит 9 ребер, так как дорога или авиалиния идёт в каждый из остальных городов. Поэтому всего $10 \cdot 9 : 2 = 45$ ребер. По условию есть 20 синих ребер. Значит, красных ребер (авиалиний) $45 – 20 = 25$.

4. (а) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

(б) Можно ли придумать семь таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с пятью другими?

(в) Можно ли разрезать прямоугольник 5×18 на доминошки так, чтобы каждая граничила ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины?

(г) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Указание. Данные пункты объединены в одну задачу от того, что их решения используют один и тот же факт: в любом графе сумма степеней вершин чётна.

(а) Ответ: нельзя.

Решение (подсчёт). Рассмотрим граф: телефоны — вершины, провода — ребра. Пусть это возможно, тогда количество ребер (проводов) равно $15 \cdot 5 : 2$ — нецелое число. Такое невозможно.

Комментарий. В указанном графе сумма степеней вершин равна $15 \cdot 5$ — нечётное число, что противоречит теореме о сумме степеней вершин.

(б) Ответ: нельзя.

Указание. Аналогично пункту (а) для графа с вершинами — словами. В нём две вершины (слова) соединены ребром, если имеют хотя бы одну общую букву. В нём сумма степеней вершин равна $7 \cdot 5$ — она нечётна.

(в) Ответ: нельзя.

Указание. Рассмотрим граф, в котором доминошки — вершины. Всего в графе $5 \cdot 18 : 2 = 45$ вершин. Они соединены ребром, если граничат по отрезку ненулевой длины. Тогда сумма степеней вершин равна $45 \cdot 3$ — нечётное число.

(г) Ответ: нельзя.

Указание. Рассмотрим граф, в котором отрезки — вершины. Они соединены ребром, если пересекаются. Сумма степеней вершин равна $9 \cdot 3$ — нечётна.

5. Вершины графа покрасили в два цвета: красный и синий. Из красных вершин есть ребра только в синие, а из синих — только в красные. Сумма степеней красных вершин — 20. Какой может быть сумма степеней синих?

Ответ: 20.

Решение. У каждого ребра один конец синий, другой — красный. Количество красных концов равна 20, значит, сумма синих концов также равна 20.

Комментарий. Заметив, в данном графе вершины разделены на две группы. При этом каждое ребро соединяет вершину одной группы с вершиной другой группы. Такие графы называют *двудольными*. В данной задаче предложили понять, что сумма степеней вершин одной группы равна сумме степеней вершин другой группы.

6. На дискотеке было 6 девочек и 8 мальчиков. Каждая девочка станцевала с 4 мальчиками. Все мальчики танцевали с одинаковым количеством девочек. Со сколькими девочками танцевали мальчики?

Ответ: 3.

Решение. Девочки станцевали $6 \cdot 4 = 24$ танцев, мальчики — тоже. Каждый из них танцевал с $24 : 8 = 3$ девочками.

Комментарий 1. Решение задачи — рассуждения про двудольный граф. В нём дети — вершины, ребра — пары на танцах. Сумма степеней вершин-девочек равна $6 \cdot 4 = 24$. Тогда сумма степеней вершин-мальчиков также равна 24. Значит, каждый мальчик танцевал $24 : 8 = 3$ раза.

Комментарий 2. Предложите ученикам нарисовать такой двудольный граф: 6 вершин-девочек со степенями 4 и 8 вершин-мальчиков со степенями 3.

7. Шесть команд в течение зимы должны сыграть однокруговой турнир. Болельщик Петя назвал число игр, которое каждая команда сыграла до Нового Года: 3, 3, 2, 2, 2, 1. Может ли такое быть или Петя ошибается?

Ответ: Петя ошибается.

Решение. Пусть Петя прав. Найдём число проведенных игр. Число «участий» равно $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$. В каждой игре реализуют два «участия». Значит, прошло $13 : 2$ — нецелое число игр, что невозможно. Значит, Петя ошибается.

Комментарий. Рассмотрим граф, в котором вершины — команды, ребра — проведенные игры. Сумма степеней вершин полученного графа чётна, но она (по словам Пети) равна $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$. Противоречие.

8. В футбольном турнире пяти команд по системе 3-1-0 победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Ответ: 6.

Решение. Победитель может набрать максимум 12 баллов (4 победы по 3 балла). Остальные 4 команды сыграют между собой 6 игр. В каждой игре распределяется 2 очка (если ничья) или 3 очка (если кто-то выиграл). Значит, эти 4 команды в сумме получат не менее $2 \cdot 6 = 12$ очков.

Значит, победитель должен набрать 12 очков, выиграв у всех остальных, а остальные игры (между оставшимися 4 командами) должны закончиться вничью.

9. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными.

(а) Каких вершин больше — синих или зеленых?

(б) Каким может быть наименьшее число синих и зеленых вершин такого графа?

Ответ: (а) зелёных больше, (б) 38 вершин.

Решение. (а) Пусть в графе B синих вершин и G зеленых вершин. Количество ребер с разными концами равно $10B = 9G$, откуда $B = 9t$, $G = 10t$. Значит, зелёных вершин больше.

(б) Чем меньше t, тем меньше вершин. Рассмотрим граф из синих вершин и ребер между ними. Сумма степеней $9t$ вершин равна $5 \cdot 9t = 45t$. Она должна быть чётна, поэтому t не менее 2.

При $t = 2$ можно построить пример такого графа, у него 38 вершин. Оставим это в качестве упражнения: покажите, как соединить между собой синие вершины, как — зеленые, как провести ребра с концами разных цветов.