

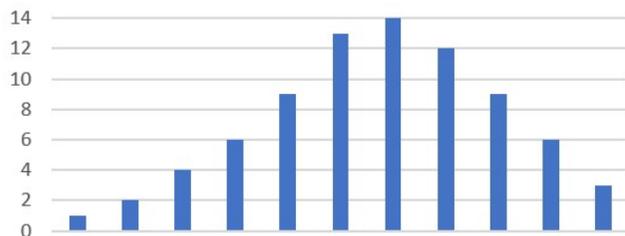
Блок 8. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2021). Задания

1. **Таблицы.** Ученики четырёх седьмых классов писали контрольную работу по математике. В таблице указано количество писавших работу и средний балл в каждом классе. Средний балл всех учеников равен 4,29. Каков средний балл учеников 7 «Г» класса?

Класс	Учеников	Ср. балл
7 "А"	28	4,5
7 "Б"	25	4,4
7 "В"	25	4,2
7 "Г"	22	

2. **Диаграммы.** Среди семиклассников нескольких школ провели тестирование. Задание состояло из 10 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам была построена диаграмма, в которой столбцы (слева направо) показывали, сколько участников дали 0 верных ответов, 1 верный ответ, ..., 10 верных ответов.



Каков средний результат теста среди всех участников?

3. **Среднее значение.** В фирме увеличили зарплату всем сотрудникам: ровно трети работников на 6000 рублей, остальным — на 12000 рублей. На сколько рублей увеличилась средняя зарплата сотрудников?

4. **Среднее значение.** В 7 «А» и 7 «Б» классах контрольную работу по статистике писали по 23 человека. Каждый получил оценку «3», «4» или «5». Средний балл девочек 7 «А» класса больше среднего балла девочек 7 «Б» класса. Средний балл мальчиков 7 «А» класса больше среднего балла мальчиков 7 «Б» класса.

Какой вывод можно сделать из этой информации?

- (1) Средний балл в 7 «А» классе обязательно больше среднего балла в 7 «Б» классе.
- (2) Средний балл в 7 «А» классе может быть больше среднего балла в 7 «Б» классе.
- (3) Средние баллы в 7 «А» классе и в 7 «Б» классе могут быть равны.
- (4) Средний балл в 7 «А» классе может быть меньше среднего балла в 7 «Б» классе.

5. **Медиана.** Набор данных состоит из 57 чисел. Его медиана — число 57. Из набора можно выкинуть 2 числа так, что медианой станет число 59. Сколько чисел набора меньше 58?

6. **Медиана.** Выписали суммы цифр всех трёхзначных (натуральных) чисел. Какое число — медиана данного набора?
7. **Медиана.** Выписали квадраты всех целых чисел от -50 до 150 . Какова медиана данного набора чисел?
8. **Размах.** Выписали квадраты всех целых чисел от -50 до 150 . Найдите середину интервала значений данного набора чисел?
9. **Размах.** Между деревнями Антоновка и Борисовка ровно 24 км. В $9:00$ из Антоновки в Борисовку вышел Антон со скоростью 4 км/ч. В $10:00$ из Борисовки в Антоновку вышел Борис со скоростью 3 км/ч. С $10:00$ до $15:00$ каждые полчаса выписывали расстояние между Антоном и Борисом. Каков размах данного набора?
10. Дан набор из 57 различных натуральных чисел. Его размах — 57 , медиана — 57 . Какова наибольшая возможная сумма всех чисел этого набора?
11. Набор из нескольких различных натуральных чисел таков, что его размах равен 20 , середина интервала значений — 11 . Какое наименьшее значение может иметь среднее арифметическое этого набора?
12. **Мода.** Лежат 2 кучки карточек, на каждой написано одно число: $1, 2, 3, 4$ или 5 . Какие из указанных утверждений являются верными?
 - (1) Если мода набора чисел первой кучки — число 3 , мода набора чисел второй кучки — число 4 , то мода набора чисел обеих кучек — число 3 или число 4 .
 - (2) Если мода набора чисел первой кучки — число 3 , мода набора чисел второй кучки — число 4 , то число 5 может быть модой набора чисел обеих кучек.
 - (3) Если мода набора чисел первой кучки — число 3 , мода набора чисел второй кучки — число 3 , то мода набора чисел обеих кучек — число 3 .
 - (4) Если мода набора чисел первой кучки — число 3 , мода набора чисел второй кучки — число 3 , то число 5 может быть модой набора чисел обеих кучек.
13. **Мода.** Имеются карточки с числами $1, 2, 3, 4, 5$. Васе дали 15 карточек. Он сказал, что мода его набора — число 1 . Ему дали еще несколько карточек, после чего он назвал модой число 2 . Когда дали еще — назвал число 3 . Потом добавили — назвал число 4 . Когда дали карточек в последний раз, Вася назвал модой число 5 . Какое наименьшее число карточек может оказаться у Васи в конце?
14. Набор состоит не более чем из 10 натуральных чисел. Размах равен 10 , среднее равно 3 . Мода содержит одно число. Какое это может быть число?

15. **Таблицы.** Несколько учеников выполняли тестовое задание. Задание состояло из 8 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам были заполнена таблица, в которой для каждого задания указано количество участников, давших верный ответ.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	9	6	7	3	2	11	5	5

Средний результат участника — 4 верных ответа. Сколько учеников выполняли это тестовое задание?

16. **Таблицы.** Несколько учеников выполняли тестовое задание. Задание состояло из 8 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам были заполнены 2 таблицы. В первой для каждого задания указано количество участников, давших верный ответ. Во второй указано, сколько участников дали 0 верных ответов, 1 верный ответ, ..., 8 верных ответов.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	14	8		14	4	10	8	1

Количество	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	4	4	7	2	2	5	2	1	0

Какое число должно стоять в пустой ячейке?

Блок 8. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2021). Задания, ответы, комментарии

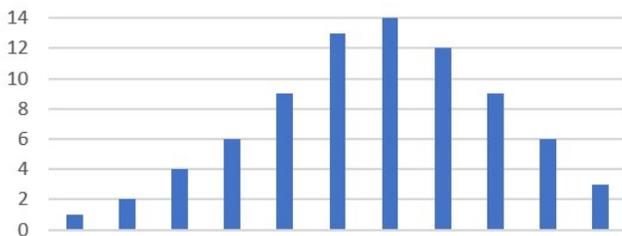
1. **Таблицы.** Ученики четырёх седьмых классов писали контрольную работу по математике. В таблице указано количество писавших работу и средний балл в каждом классе. Средний балл всех учеников равен 4,29. Каков средний балл учеников 7 «Г» класса?

Класс	Учеников	Ср. балл
7 "А"	28	4,5
7 "Б"	25	4,4
7 "В"	25	4,2
7 "Г"	22	

Ответ: 4.

Решение. Во всех четырёх классах $28 + 25 + 25 + 22 = 100$ учеников, сумма их баллов равна $4,29 \cdot 100 = 429$. Сумма баллов классов «А», «Б» и «В» равна $4,5 \cdot 28 + 4,4 \cdot 25 + 4,2 \cdot 25 = 341$. Сумма баллов класса «Г» равна $429 - 341 = 88$, средний балл в нём $88 : 22 = 4$.

2. **Диаграммы.** Среди семиклассников нескольких школ провели тестирование. Задание состояло из 10 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам была построена диаграмма, в которой столбцы (слева направо) показывали, сколько участников дали 0 верных ответов, 1 верный ответ, ..., 10 верных ответов.



Каков средний результат теста среди всех участников?

Ответ: 5,73.

Решение. Запишем данные, показанные на диаграмме, в таблицу:

Верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Учеников	1	2	4	6	9	13	14	12	9	6	3

Количество учеников — сумма чисел второй строки, она равна 79. Общее количество верных ответов — сумма произведений чисел каждого столбца. Она равна $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \dots + 10 \cdot 3 = 453$. Средний результат равен $453 : 79 \approx 5,73$.

3. **Среднее значение.** В фирме увеличили зарплату всем сотрудникам: ровно трети работников на 6000 рублей, остальным — на 12000 рублей. На сколько рублей увеличилась средняя зарплата сотрудников?

Ответ: 10000.

Решение. Пусть было $3n$ сотрудников, у n человек суммарная зарплата (в тыс. руб.) была S_1 , стала $S_1 + 6n$; у остальных $2n$ человек была S_2 , стала $S_2 + 24n$. Средняя была $(S_1 + S_2)/3n$, стала $(S_1 + S_2 + 30n)/3n$, она увеличилась на $30n/3n = 10$ тыс. руб.

4. **Среднее значение.** В 7 «А» и 7 «Б» классах контрольную работу по статистике писали по 23 человека. Каждый получил оценку «3», «4» или «5». Средний балл девочек 7 «А» класса больше среднего балла девочек 7 «Б» класса. Средний балл мальчиков 7 «А» класса больше среднего балла мальчиков 7 «Б» класса.

Какой вывод можно сделать из этой информации?

- (1) Средний балл в 7 «А» классе обязательно больше среднего балла в 7 «Б» классе.
- (2) Средний балл в 7 «А» классе может быть больше среднего балла в 7 «Б» классе.
- (3) Средние баллы в 7 «А» классе и в 7 «Б» классе могут быть равны.
- (4) Средний балл в 7 «А» классе может быть меньше среднего балла в 7 «Б» классе.

Ответ: 2, 3 и 4

Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

- (1) Так как утверждения (3) и (4) верны, то утверждение (1) является неверным.
- (2) Такое, конечно, может быть. Например, если в 7 «А» все получили оценки «5», а в 7 «Б» классе все получили оценки «4».
- (3) Пусть в 7 «А» классе 11 мальчиков получили «3», один мальчик — «4», 11 девочек — «5»; в 7 «Б» классе 11 мальчиков получили «3», одна девочка — «4», 11 девочек — «5».

	Мальчики	Девочки
7 "А"	11 по "3" и 1 чел "4"	11 по "5"
7 "Б"	11 по "3"	1 чел "4" и 11 по "5"

В этой ситуации условие задачи выполнено: у мальчиков 7 «А» класса средний балл больше «3», у мальчиков 7 «Б» — равен «3», у девочек 7 «А» класса средний балл равен «5», у девочек 7 «Б» — чуть меньше «5». При этом в классах равны суммы баллов и количество учеников, поэтому и средние равны.

- (4) В примере, описанном в таблице, выполнено условие задачи, но средний балл класса «Б» больше среднего балла класса «А».

	Мальчики	Девочки
7 "А"	11 по "3" и 1 чел "4"	11 по "5"
7 "Б"	10 по "3"	2 чел "4" и 11 по "5"

5. **Медиана.** Набор данных состоит из 57 чисел. Его медиана — число 57. Из набора можно выкинуть 2 числа так, что медианой станет число 59. Сколько чисел набора меньше 58?

Ответ: 29.

Решение. Выпишем числа, чтобы каждое следующее было не менее предыдущего. Если 57 — медиана набора, то есть 28 чисел не более 57, число 57 и 28 чисел не менее 57.

Медиана увеличится, если выкинуть 2 числа, которые не более 57. Действительно, если выкинули числа в ряду до и после медианы, то медиана не изменится; если оба числа после медианы, то медиана не увеличится.

Также из условия следует, что между числами 57 и 59 нет иных чисел.

Тогда меньше 58 — медиана ряда и числа, стоящие до неё, всего $1 + 28 = 29$ штук.

6. **Медиана.** Выписали суммы цифр всех трёхзначных (натуральных) чисел. Какое число — медиана данного набора?

Ответ: 14.

Решение. Каждому трёхзначному числу \overline{abc} поставим в пару число, у которого $10 - a$ сотен, $9 - b$ десятков и $9 - c$ единиц. Например, в паре с 100 будет 999, в паре с 234 будет 776.

Заметим, если сумма цифр одного числа пары равна $s = a + b + c$, то у другого числа пары сумма цифр равна $(10 - a) + (9 - b) + (9 - c) = 28 - s$.

Вывод: трёхзначных чисел с суммой цифр 1 столько же, сколько чисел с суммой цифр 27, с суммой 2 — сколько с суммой 26, ..., с суммой 13 — сколько с суммой 15. Остаются числа с суммой 14, это и будет медианным значением.

7. **Медиана.** Выписали квадраты всех целых чисел от -50 до 150 . Какова медиана данного набора чисел?

Ответ: 2500.

Решение. У квадратов чисел от -50 до 50 всего 101 значение от 0 до 2500. От 51 до 150 всего 100 значений, которые больше 2500. Значит, медиана — число 2500.

8. **Размах.** Выписали квадраты всех целых чисел от -50 до 150 . Найдите середину интервала значений данного набора чисел.

Ответ: 11250.

Решение. Наименьшее значение $0 = 0^2$, наибольшее — $150^2 = 22500$. Середина интервала значений — $(22500 - 0) : 2 = 11250$.

9. **Размах.** Между деревнями Антоновка и Борисовка ровно 24 км. В 9:00 из Антоновки в Борисовку вышел Антон со скоростью 4 км/ч. В 10:00 из Борисовки в Антоновку вышел Борис со скоростью 3 км/ч. С 10:00 до 15:00 каждые полчаса выписывали расстояние между Антоном и Борисом. Каков размах данного набора?

Ответ: 19.

Решение. К 10:00 Антон прошёл 4 км, расстояние между Антоном и Борисом стало $24 - 4 = 20$ км. Скорость сближения — $3 + 4 = 7$ км/ч, каждые полчаса расстояние уменьшается на $7 : 2 = 3,5$ км. Расстояния будут 20, $20 - 3,5 = 16,5$ и так далее. Получаем набор (20; 16,5; 13; 9,5; 6; 2,5; 1; 4,5; 8; 11,5; 15). Его размах $20 - 1 = 19$.

10. Дан набор из 57 различных натуральных чисел. Его размах — 57, медиана — 57. Какова наибольшая возможная сумма всех чисел этого набора?

Ответ: 3277.

Решение. В наборе есть число 57, 28 чисел меньше его и 28 чисел больше его. Наибольшая сумма первой группы в том случае, если это числа 56, 55, ..., 29. Максимальное первое число — 29, значит, максимальное последнее число — $29 + 57 = 86$. Наибольшие числа второй группы — 86, 85, ..., 59. Сумма чисел такого набора равна 3277.

11. Набор из нескольких различных натуральных чисел таков, что его размах равен 20, середина интервала значений — 11. Какое наименьшее значение может иметь среднее арифметическое этого набора?

Ответ: 6.

Решение. Если размах равен 20, середина интервала значений — 11, то наименьшее число — $11 - 20 : 2 = 1$, наибольшее — $11 + 20 : 2 = 21$. Если наименьшее среднее значение достигается, когда в наборе k чисел, то оно достигается на наборе (1; 2; ...; $k - 1$; 22).

Подсчётом получаем значения средних для первых значений k , которые указаны в таблице справа. Если рассматривать большие значения k , то к набору придётся добавлять числа больше среднего, от этого среднее всего набора будет увеличиваться.

Вывод: наименьшее возможное среднее равно 6.

k	Ср.
2	11
3	8
4	6,75
5	6,2
6	6
7	6

12. **Мода.** Лежат 2 кучки карточек, на каждой написано одно число: 1, 2, 3, 4 или 5. Какие из указанных утверждений являются верными?

(1) Если мода набора чисел первой кучки — число 3, мода набора чисел второй кучки — число 4, то мода набора чисел обеих кучек — число 3 или число 4.

(2) Если мода набора чисел первой кучки — число 3, мода набора чисел второй кучки — число 4, то число 5 может быть модой набора чисел обеих кучек.

(3) Если мода набора чисел первой кучки — число 3, мода набора чисел второй кучки — число 3, то мода набора чисел обеих кучек — число 3.

(4) Если мода набора чисел первой кучки — число 3, мода набора чисел второй кучки — число 3, то число 5 может быть модой набора чисел обеих кучек.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Если в кучках наборы (3; 3; 3; 5; 5) и (4; 4; 4; 5; 5), то их моды 3 и 4, а мода из объединения — число 5. Значит, (1) не верно, (2) верно.

Если мода обеих кучек — число 3, то его больше и в объединении. Значит, (3) — верное утверждение, а (4) — неверное.

13. **Мода.** Имеются карточки с числами 1, 2, 3, 4, 5. Васе дали 15 карточек. Он сказал, что мода его набора — число 1. Ему дали еще несколько карточек, после чего он назвал модой число 2. Когда дали еще — назвал число 3. Потом добавили — назвал число 4. Когда дали карточек в последний раз, Вася назвал модой число 5. Какое наименьшее число карточек может оказаться у Васи в конце?

Ответ: 30.

Решение. В начале у Васи не менее 4 карточек с числом 1. Действительно, если число 1 не более чем на 3 карточках, то с каждым из остальных не более 2 карточек, всего не более $3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$ карточек (противоречие с условием).

Когда число 2 стало модой, карточек с ним должно быть не менее 5. Когда стало модой 3 — не менее 6 карточек с числом 3, ..., когда модой стало 5 — не менее 8 карточек с числом 5. На руках у Васи должно быть не менее $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ карточек.

Такое возможно: если у Васи в начале 4 карточки с числом 1 и по 2 или 3 карточки с остальными числами, то ему могли сначала сделать 5 карточек с числом 2, затем 6 карточек с числом 3, 7 карточек с числом 4, а в конце — 8 карточек с числом 5. Будет ситуация, описанная в условии.

14. Набор состоит не более чем из 10 натуральных чисел. Размах равен 10, среднее равно 3. Мода содержит одно число. Какое это может быть число?

Ответ: 1, 2 или 3.

Решение. Мода 1 у набора (1; 1; 1; 1; 11). Мода 2 у набора (1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 11). Мода 3 у набора (1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 3; 11).

Если мода не менее 4, то среднее более 3. Действительно, тогда среднее наибольшего числа и всех чисел, меньших 3, должно быть менее 3. Наименьшее среднее, если есть k единиц, k двоек и число 11. Тогда $k + 2k + 11 < 3(2k + 1)$, откуда k не менее 3. Тогда чисел не менее $3 + 3 + 4 + 1 = 11$, то есть более 10.

15. **Таблицы.** Несколько учеников выполняли тестовое задание. Задание состояло из 8 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам были заполнена таблица, в которой для каждого задания указано количество участников, давших верный ответ.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	9	6	7	3	2	11	5	5

Средний результат участника — 4 верных ответа. Сколько учеников выполняли это тестовое задание?

Ответ: 12.

Решение. Общее число верных ответов — сумма чисел второй строки, она равна 48. Если средний результат равен 4, то работу выполняли $48 : 4 = 12$ человек.

16. **Таблицы.** Несколько учеников выполняли тестовое задание. Задание состояло из 8 вопросов, на каждый из которых участник дал верный или неверный ответ. По итогам были заполнены 2 таблицы. В первой для каждого задания указано количество участников, давших верный ответ. Во второй указано, сколько участников дали 0 верных ответов, 1 верный ответ, ..., 8 верных ответов.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	14	8		14	4	10	8	1

Количество	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Решили	4	4	7	2	2	5	2	1	0

Какое число должно стоять в пустой ячейке?

Ответ: 17.

Решение. Общее число верных ответов можно определить по второй таблице: достаточно перемножить числа в каждом столбце, а результаты сложить. Получится 76.



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2020-2021 учебный год

Значит, сумма чисел во второй строке первой таблицы также равна 76. Вычитая из 76 известные числа находим пропущенное число, это 17.