Блок 6. Квадратные уравнения

Подготовительное занятие

1. (а) Числа a, b — корни уравнения $x(x+1) = 2019 \cdot 2020$, $a < b$. Найдите $a + 2b$.

   (б) Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - x - 999000 = 0$?

2. Разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2020. Сколько различных корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

3. Васенька решил квадратное уравнение $2x^2 - 2ax + a = 0$, где a — некоторое число. Оно имеет два различных корня x_1 и x_2.

   Чему равно значение выражения $1/x_1 + 1/x_2$?

4. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$. Дискриминант D уравнения $P(x) = 0$ положителен. Сколько различных корней может иметь уравнение $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$?

5. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — целые нечётные числа. Может ли он иметь два целых корня?

6. Дискриминанты трех квадратных уравнений с единичным коэффициентом при x^2 равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

7. Известно, что квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют действительных корней. Верно ли, что и уравнение $x^2 + (a+c)x/2 + (b+d)/2 = 0$ также не имеет корней?

8. Число

   $$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

   является корнем уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где b, c — целые числа.

   Найдите значение $b + 20c$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Блок 6. Квадратные уравнения

Подготовительное занятие

1. (а) Числа a, b — корни уравнения $x(x+1) = 2019 \cdot 2020$, $a < b$. Найдите $a + 2b$.

(б) Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - x - 999000 = 0$?

2. Разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2020. Сколько различных корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

3. Васенька решил квадратное уравнение $2x^2 - 2ax + a = 0$, где a — некоторое число. Оно имеет два различных корня x_1 и x_2.

Чему равно значение выражения $1/x_1 + 1/x_2$?

4. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$. Дискриминант D уравнения $P(x) = 0$ положителен. Сколько различных корней может иметь уравнение $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$?

5. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — целые нечётные числа. Может ли он иметь два целых корня?

6. Дискриминанты трех квадратных уравнений с единичным коэффициентом при x^2 равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

7. Известно, что квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют действительных корней. Верно ли, что и уравнение $x^2 + (a+c)x/2 + (b+d)/2 = 0$ также не имеет корней?

8. Число

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

является корнем уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где b, c — целые числа.

Найдите значение $b + 20c$.

karusel.desc.ru ~ 131 ~

Блок 6. Квадратные уравнения

Подготовительное занятие

Занятие посвящено задачам про квадратные уравнения. В большей части достаточно оперировать формулами корней и дискриминантом, иногда — теоремой Виета.

- Выражение $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант. Если $D < 0$, то корней нет, в остальных случаях корни равны

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Если существуют корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то он может быть разложен на множители: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни этого трёхчлена.
- *Теорема Виета*. Для квадратных уравнений вида $rx^2 + px + q = 0$ с корнями x_1 и x_2 справедливо следующее: $x_1 + x_2 = -p/r$; $x_1 \cdot x_2 = q/r$.

1. (а) Числа a, b — корни уравнения $x(x+1) = 2019 \cdot 2020$, $a < b$. Найдите $a + 2b$.

   Ответ: 2018.

   Указание: $a = -2020, b = 2019, a + 2b = 2018$.

   Решение. В данном уравнении не сложно угадать корни: $a = -2020, b = 2019$. Иных корней нет, так как квадратное уравнение имеет не более двух корней. Искомое значение равно $a + 2b = 2018$.

   Комментарий. Задача интернет-карусели 2019-2020 учебного года.

   (б) Сколько точек с целыми координатами расположены на оси абсцисс между корнями уравнения $x^2 - x - 999000 = 0$?

   Ответ: 1998.

   Указание: корни — числа 1000 и −999.

   Решение. Корни данного уравнения нетрудно подобрать, воспользовавшись обратной теоремой Виета: числа $x_1 = -999, x_2 = 1000$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -999000$, значит, они — корни данного уравнения.

   Между числами −999 и 1000 находится 998 отрицательных целых, 999 положительных чисел и число 0. Итого 998 + 999 + 1 = 1998 чисел.

   Комментарий. Задача интернет-карусели 2019-2020 учебного года. Верный ответ дали 105 команд, ответ «1997» — 16 команд, ответ «1999» — 26 команд, ответ «2000» — 21 команда.

2. Разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2020. Сколько различных корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

   Ответ: 2.

   Решение. Разность кубов первого уравнения не равна нулю, значит, оно имеет два различных корня и его дискриминант положителен: $D_1 = b^2 - 4ac > 0$.

   Теперь можно оценить дискриминант второго уравнения равен

   $D_2 = 4b^2 - 16ac = 4D_1 > 0$.

   Значит, второе уравнение имеет 2 различных корня.

3. Васенька решил квадратное уравнение $2x^2 - 2ax + a = 0$, где a — некоторое число. Оно имеет два различных корня x_1 и x_2.

   Чему равно значение выражения $1/x_1 + 1/x_2$?

   Ответ: 2.

   Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = a,\ x_1x_2 = a/2$. Тогда получаем

   $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{a}{a/2} = 2.$$

4. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$. Дискриминант D уравнения $P(x) = 0$ положителен. Сколько различных корней может иметь уравнение $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$?

   Ответ: 1.

   Решение. Из условия $D = a^2 - 4b > 0$.

   Преобразуем уравнение:

   $P(x + \sqrt{D}) = x^2 + ax + b + 2x\sqrt{D} + D + a\sqrt{D}$,

   $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = x^2 + x(a + \sqrt{D}) + (b + 0{,}5D + 0{,}5a\sqrt{D}) = 0$.

   Дискриминант полученного уравнения равен

   $D_1 = (a + \sqrt{D})^2 - 4(b + 0{,}5D + 0{,}5a\sqrt{D}) = a^2 - 4b - D = 0$.

5. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — целые нечётные числа. Может ли он иметь два целых корня?

   Ответ: нет.

   Решение. Пусть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, a, b, c, x_1, x_2 — целые числа, a, b, c — нечётные.

По теореме Виета имеем: $ax_1x_2 = c$, $a(x_1 + x_2) = -b$. Из этих соотношений следует, что x_1x_2 и $x_1 + x_2$ — нечётные. Это невозможно, сумма и произведение двух целых чисел не могут быть нечётными одновременно.

6. Дискриминанты трех квадратных уравнений с единичным коэффициентом при x^2 равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

Решение. Заметим, что для корней x_1, x_2 квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ выполнено:

$$|x_2 - x_1| = \left|x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2}\right| = \sqrt{D}.$$

Из этого следует, что корни первого уравнения отличаются на 1, второго — на 2, третьего — на 3, то есть у первого уравнения корни b и $b + 1$, у второго — c и $c + 2$, у третьего — d и $d + 3$. Возьмем корни b, c и $d + 3$. Тогда их сумма равна сумме оставшихся корней.

7. Известно, что квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют действительных корней. Верно ли, что и уравнение $x^2 + (a + c)x/2 + (b + d)/2 = 0$ также не имеет корней?

Ответ: да, верно.

Решение 1 (дискриминанты). Уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют действительных корней, значит, $D_1 = a^2 - 4b < 0$ и $D_2 = c^2 - 4d < 0$.

Рассмотрим дискриминант уравнения $x^2 + (a + c)x/2 + (b + d)/2 = 0$:

$$D = (a + c)^2 - 8(b + d) = a^2 - 4b + c^2 - 4d + 2ac - 4b - 4d =$$

$$= 2D_1 + 2D_2 - a^2 - c^2 + 2ac = 2D_1 + 2D_2 - (a - c)^2 < 0.$$

Значит, оно не имеет действительных корней.

Решение 2 (графики). Если данные уравнения не имеют корней, то графики функций $y_1(x) = x^2 + ax + b$ и $y_2(x) = x^2 + cx + d$ лежат выше оси Ox. Значит, выше оси Ox расположен и график их суммы $y_3(x) = 2x^2 + (a + c)x + (b + d)$, а также график функции $y_4(x) = y_3(x)/2 = x^2 + (a + c)x/2 + (b + d)/2$. Отсюда следует, что указанное уравнение не имеет корней.

8. Число

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

является корнем уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где b, c — целые числа.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Найдите значение $b + 20c$.

Ответ: 10.

Указание: подходит только уравнение $x^2 - 10x + 1 = 0$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Тогда $\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^2 + b\left(5 - 2\sqrt{6}\right) + c = (49 + 5b + c) - (20 + 2b)\sqrt{6} = 0$.

Если $20 + 2b \neq 0$, то слева будет иррациональное число, а справа — целое, что невозможно. Значит, $20 + 2b = 0$, откуда и $49 + 5b + c = 0$. Тогда $b = -10, c = 1$, $b + 20c = 10$.

Комментарий. Задача интернет-карусели 2019-2020 учебного года.