Блок 7. Множества

Подготовительное занятие

✓ Дополнение множества A — это множество элементов, не содержащихся в A, обозначается $\bar{A}$.

✓ Объединение множеств A и B — множество, содержащее в себе все элементы обоих множеств A и B, обозначается $A \cup B$.

✓ Пересечение множеств A и B — множество, которому принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат A и B, обозначается $A \cap B$. В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

✓ Разность множеств A и B — это множество, в которое входят все элементы первого множества, не входящие во второе множество, обозначается $A \backslash B$.

- Даны множества целых чисел $A = \{x | -3 < x \leq 5\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 13\}$.
  (а) Выпишите элементы каждого из множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.
  (б) Найдите $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \backslash B|$.
  (в) Выпишите элементы множества $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

- На входе в торговый центр посетители обычно берут либо одну маску, либо одну пару перчаток, либо одну маску и одну пару перчаток. За час было разобрано 108 масок и 99 пар перчаток. Сколько было посетителей в этот час, если 65 человек взяли и маску, и две перчатки?

- Вечером 38 мальчиков обсуждали компьютерные игры. Оказалось, что в Ведьмака любят играть 12 мальчиков, в Fallout — 22 мальчика. При этом в Ведьмака и Fallout — 7 мальчиков, Fallout и NFS — 9 мальчиков, в NFS и Ведьмака — 5 мальчиков, во все три игры — двое, а один вообще не любит никакие игры. Скольким мальчикам нравится играть в NFS?

1. Задайте перечислением множество, элементы которого
   (а) двузначные числа, являющиеся точными квадратами;
   (б) параллелограммы с целыми сторонами периметра 10.

2. Сколько элементов в множестве $A = X \cap \mathbb{Z}$, где $X = \{-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{127}/11\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел?

3. Клоуны играли в прятки детьми. Всего было 36 детей. Из них двое не прятались ни в подвале, ни в магазине, ни в цирке. В подвале за всё время пряталось 25 ребят, в магазине — 11, а в цирке 17 ребят; и в подвале, и в магазине — 6; и в подвале, и в цирке — 10; и в цирке, и в магазине — 4. Сколько детей пряталось во всех трёх местах?

   Ответ: 1.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

   Решение. Учитывая, что двое не входят в три заданных множества, имеем дело с 36 – 2 = 34 ребятами. Запишем формулу включений-исключений для трёх множеств: 34 = 25 + 11 + 17 – 6 – 10 – 4 + x, где x — искомое число ребят, откуда найдем x = 1.

4. Найдите все числа, удовлетворяющие условиям:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x^2+3)(x+3)^2=0\\ (|x-2|-3)\cdot(x^3-9x)=0\end{cases}\\ x^3-2x^2=-x\end{array}\right.$$

5. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь 1966 см^2. Площадь пересечения составляет 85 см^2. Площадь круга равна 1322 см^2. Чему равен периметр квадрата?

6. Нескольким ребятам раздали по три карточки. На некоторых написана цифра «5», на остальных — «7». Оказалось, что число «55» могут сложить из своих карточек 25 ребят, число «77» — 17 ребят, а число «57» — 8 ребят. Сколько ребят получили три одинаковые карточки?

Блок 7. Множества

Подготовительное занятие

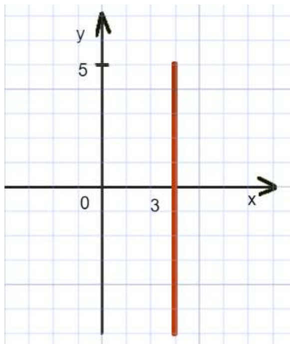
Занятие посвящено понятию множества (в том числе их обозначениям), операциям над множествами, примерам из разных разделов математики, формуле включения-исключения.

Множество — это набор каких-то элементов, о которых хочется говорить, как об одном целом. Они могут быть связаны некоторым свойством, а могут объединяться только тем, что их про них вместе говорят как про одно множество.

Множество можно задать по-разному.

Если множество содержит небольшое число элементов, то его можно задать перечислением элементов. Принято записывать так: $A = \{-2;\ 0;\ m;\ \sqrt{3/7};\ 3{,}4\}$. То, что элемент принадлежит множеству, записывают так: $\sqrt{3/7} \in A$. Количество элементов конечного множества обозначают $|A|$. В приведенном примере $|A| = 5$.

Если есть общее свойство, определяющее его состав, то множество можно описать свойством. Например, так: множество B состоит из всех тупоугольных треугольников на плоскости.



Множество C пар действительных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} y \le 5 \\ x = 3 \end{cases}$, можно изобразить на координатной плоскости. Заданное множество будет состоять из точек координатной плоскости, принадлежащих красному лучу с началом в точке (3; 5), как показано на рисунке справа. Также такое множество можно записать следующим образом: $C = \{(x; y) | x = 3, y \le 5\}$.

Также множеством является набор, в котором нет элементов. Его называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$.

Самые популярные операции с множества следующие.

✓ Дополнение множества A — это множество элементов, не содержащихся в A, обозначается $\bar{A}$.

✓ Объединение множеств A и B — множество, содержащее в себе все элементы обоих множеств A и B, обозначается $A \cup B$.

✓ Пересечение множеств A и B — множество, которому принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат A и B, обозначается $A \cap B$. В частности, если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

✓ Разность множеств A и B — это множество, в которое входят все элементы первого множества, не входящие во второе множество, обозначается $A \backslash B$.

- Даны множества целых чисел $A = \{x | -3 < x \le 5\}$, $B = \{x | -1 < x \le 13\}$.
  (а) Выпишите элементы каждого из множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.
  (б) Найдите $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \backslash B|$.
  (в) Выпишите элементы множества $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

  Указание. Можно выписать элементы множеств:
  $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$,
  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

  (а) Решение. Можно выписать элементы множеств:
  $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$,
  $A \cap B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$,
  $A \backslash B = \{-2; -1\}$.

  (б) Ответ: $|A| = 8$, $|B| = 14$, $|A \cup B| = 16$, $|A \cap B| = 6$, $|A \backslash B| = 2$

  Указание. Обратите внимание, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

  (в) Ответ: $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{-2; -1; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

  Указание: выпишите сначала элементы $A \backslash B$, а затем — элементы $B \backslash A$.

- На входе в торговый центр посетители обычно берут либо одну маску, либо одну пару перчаток, либо одну маску и одну пару перчаток. За час было разобрано 108 масок и 99 пар перчаток. Сколько было посетителей в этот час, если 65 человек взяли и маску, и две перчатки?

  Ответ: 142.

  Решение. В сумму 108 + 99 = 207 по одному разу входят те, кто взят только маску или только перчатки, и дважды входят те, кто взял и то, и другое. Значит, всего было 207 – 65 = 142 посетителя.

  Комментарий. Заметим, подсчёт идёт согласно соотношения, называемой формулой включения-исключения для двух множеств: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, где A — множество тех, кто взял маску, B — множество тех, кто взял перчатки.

- Вечером 38 мальчиков обсуждали компьютерные игры. Оказалось, что в Ведьмака любят играть 12 мальчиков, в Fallout — 22 мальчика. При этом в Ведьмака и Fallout — 7 мальчиков, Fallout и NFS — 9 мальчиков, в NFS и Ведьмака — 5 мальчиков, во все три игры — двое, а один вообще не любит никакие игры. Скольким мальчикам нравится играть в NFS?

  Ответ: 23.

Указание. Кроме разных расчётов, используя круги Эйлера, нужно показать способ, указанный далее в решении.

Решение. Пусть игра NFS нравится n мальчикам. Тогда в сумму $12 + 22 + n = 34 + n$ любители только одной из игр входят 1 раз, любители ровно двух игр — 2 раза, любители всех трёх игр — 3 раза.

Если из $34 + n$ убрать пересечения по 2 играм (7, 9 и 5), то любители ровно двух игр будут учитываться 2 – 1 = 1 раз, любителей всех трёх игр вычтут 3 раза (то есть, они вообще не учитываются). Значит, всего любят хоть какие-то игры $(34 + n) - (5 + 7 + 9) + 2 = 15 + n$ или $38 - 1 = 37$ человек. Из соотношения $15 + n = 37$ получаем $n = 22$.

Комментарий. Заметим, что расчёты в решении соответствуют формуле включения-исключения для трёх множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_3 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

- В предыдущих двух упражнениях полезно нарисовать круги-диаграммы Эйлера. Заметим, что при сложении числа элементов всех множеств те элементы, которые содержатся ровно в двух множествах, войдут в эту сумму дважды; те элементы, которые содержатся ровно в трех множествах — трижды.
- Найти число всех элементов всех множеств, необходимо из суммы вычесть все повторения. В случае двух множеств формула для этого числа будет выглядеть так:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- В случае трех множеств формула будет несколько сложнее. Вычитая числа элементов во всех попарных пересечениях, мы так же вычтем число элементов, содержащихся во всех трех множествах, поэтому необходимо его добавить:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_3 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Задайте перечислением множество, элементы которого

   (а) двузначные числа, являющиеся точными квадратами;

   (б) параллелограммы с целыми сторонами периметра 10.

   (а) Ответ: {16; 25; 36; 49; 64; 81}.

   (б) Ответ: {1×4, 2×3}.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

2. Сколько элементов в множестве $A = X \cap \mathbb{Z}$, где $X = \{-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{127}/11\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел?

   Ответ: 4 элемента.

   Указание: $A = \{-2; -1; 0; 1\}$.

3. Клоуны играли в прятки детьми. Всего было 36 детей. Из них двое не прятались ни в подвале, ни в магазине, ни в цирке. В подвале за всё время пряталось 25 ребят, в магазине — 11, а в цирке 17 ребят; и в подвале, и в магазине — 6; и в подвале, и в цирке — 10; и в цирке, и в магазине — 4. Сколько детей пряталось во всех трёх местах?

   Ответ: 1.

   Решение. Учитывая, что двое не входят в три заданных множества, имеем дело с 36 – 2 = 34 ребятами. Запишем формулу включений-исключений для трёх множеств: 34 = 25 + 11 + 17 – 6 – 10 – 4 + x, где x — искомое число ребят, откуда найдем $x = 1$.

4. Найдите все числа, удовлетворяющие условиям:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2+3)(x+3)^2 = 0 \\ (|x-2|-3)\cdot(x^3-9x) = 0 \end{cases} \\ \qquad x^3 - 2x^2 = -x \end{array}\right.$$

   Ответ: 0, 1, –3.

   Решение. Решением первого уравнения системы является число –3, решением второго — числа 5, –1, 0, 3 и –3. Таким образом, решение системы $x = -3$. Решения третьего уравнения — числа 0 и 1.

5. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь 1966 см^2. Площадь пересечения составляет 85 см^2. Площадь круга равна 1322 см^2. Чему равен периметр квадрата?

   Ответ: 108 см.

   Решение. По формуле включений-исключений площадь квадрата равна 1966 – 1322 + 85 = 729 см^2, откуда сторона равна 27 см, тогда периметр равен 27 · 4 = 108 см.

6. Нескольким ребятам раздали по три карточки. На некоторых написана цифра «5», на остальных — «7». Оказалось, что число «55» могут сложить из своих карточек 25 ребят, число «77» — 17 ребят, а число «57» — 8 ребят. Сколько ребят получили три одинаковые карточки?

   Ответ: 34.

Решение. Возможны четыре вида наборов из трёх карточек:
— 5, 5, 5; пусть a ребят имеют такой набор;
— 5, 5, 7; пусть b ребят имеют такой набор;
— 5, 7, 7; пусть c ребят имеют такой набор;
— 7, 7, 7; пусть d ребят имеют такой набор.

Тогда $a + b = 25$, $c + d = 17$, $b + c = 8$. Нас интересует величина $a + d$.
Имеем: $a + d = (a + b) + (c + d) - (b + c) = 25 + 17 - 8 = 34$.