Блок 8. Остатки и уравнения в целых числах

Линейные уравнения в целых числах. Подготовительное занятие

- Имеется неограниченное количество бутылок объемом 1 л и 2 л. Необходимо разлить по этим бутылкам 50 л воды так, что бутылка либо остается пустой, либо наполняется полностью. Сколько бутылок может быть занято?
- Сколькими способами 50 руб. можно разменять монетами достоинством 1 руб. и 2 руб.?
- Сколько пар $(x; y)$ неотрицательных целых чисел удовлетворяют $x + 2y = 50$?
- Сколько точек, обе координаты которых — натуральные числа, лежат на графике функции $y = 50 - 2x$?

1. Сколькими способами 100 руб. можно разменять монетами достоинством 3 руб. и 5 руб.?
2. Восьмиклассница Оля отлично успевает по математике. В дневнике у неё только пятерки и четверки, причем пятерок больше. Сумма всех оценок Оли по математике равна 47. Сколько она получила пятерок и сколько четверок?
3. Куплены фломастеры по 7 рублей и карандаши по 4 рубля за штуку, всего на сумму 51 рубль. Сколько куплено фломастеров и карандашей?
4. Вовочка купил ручки по 8 рублей и карандаши по 5 рублей. Причем за все карандаши он заплатил на 19 рублей больше, чем за все ручки. Сколько ручек и сколько карандашей купил Вовочка, если их всего не более 20?
5. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?
6. Прямая на координатной плоскости проходит через точки (2; 18) и (–185; 137).

   (а) Укажите еще несколько точек с целыми координатами, через которые проходит эта прямая.

   (б) Сколько точек с целыми координатами лежит на отрезке с концами в указанных точках?
7. Решите ребус: 4 · ДУБЛОМ = 3 · ЛОМДУБ. Решить ребус — заменить одинаковые буквы равными цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Блок 8. Остатки и уравнения в целых числах

Линейные уравнения в целых числах. Подготовительное занятие

- Имеется неограниченное количество бутылок объемом 1 л и 2 л. Необходимо разлить по этим бутылкам 50 л воды так, что бутылка либо остается пустой, либо наполняется полностью. Сколько бутылок может быть занято?
- Сколькими способами 50 руб. можно разменять монетами достоинством 1 руб. и 2 руб.?
- Сколько пар $(x; y)$ неотрицательных целых чисел удовлетворяют $x + 2y = 50$?
- Сколько точек, обе координаты которых — натуральные числа, лежат на графике функции $y = 50 - 2x$?

1. Сколькими способами 100 руб. можно разменять монетами достоинством 3 руб. и 5 руб.?
2. Восьмиклассница Оля отлично успевает по математике. В дневнике у неё только пятерки и четверки, причем пятерок больше. Сумма всех оценок Оли по математике равна 47. Сколько она получила пятерок и сколько четверок?
3. Куплены фломастеры по 7 рублей и карандаши по 4 рубля за штуку, всего на сумму 51 рубль. Сколько куплено фломастеров и карандашей?
4. Вовочка купил ручки по 8 рублей и карандаши по 5 рублей. Причем за все карандаши он заплатил на 19 рублей больше, чем за все ручки. Сколько ручек и сколько карандашей купил Вовочка, если их всего не более 20?
5. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?
6. Прямая на координатной плоскости проходит через точки (2; 18) и (–185; 137).

   (а) Укажите еще несколько точек с целыми координатами, через которые проходит эта прямая.

   (б) Сколько точек с целыми координатами лежит на отрезке с концами в указанных точках?
7. Решите ребус: 4 · ДУБЛОМ = 3 · ЛОМДУБ. Решить ребус — заменить одинаковые буквы равными цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным.

karusel.desc.ru ~ 188 ~

Блок 8. Остатки и уравнения в целых числах

Линейные уравнения в целых числах. Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Предлагаем разобрать 4 вводные задачи, которые, на самом деле, — одна и та же задача, сформулированная по-разному. К каждой из них предлагаем своё решение, демонстрируя различные способы «думать» про одну и ту же математическую ситуацию.

- Имеется неограниченное количество бутылок объемом 1 л и 2 л. Необходимо разлить по этим бутылкам 50 л воды так, что бутылка либо остается пустой, либо наполняется полностью. Сколько бутылок может быть занято?

  Ответ: от 25 до 50.

  Решение. Разольём всю воду по 1-литровым бутылкам (это способ № 1), а затем из двух бутылок по 1 л можно перелить воду в одну бутылку объемом 2 л. Так можно делать 50 : 2 = 25 раз. В итоге будет занято 25 двухлитровых бутылок.

- Сколькими способами 50 руб. можно разменять монетами достоинством 1 руб. и 2 руб.?

  Ответ: 26.

  Решение. Числа 2 и 50 — чётные, поэтому, монетами достоинством 1 руб. набрана чётная сумма от 0 = 0 · 2 руб. до 50 = 25 · 2 руб. Остаётся заметить, что от 0 до 25 всего 26 чисел.

- Сколько пар $(x; y)$ неотрицательных целых чисел удовлетворяют $x + 2y = 50$?

  Ответ: 26.

  Решение. Заметим, x — чётное число, пусть $x = 2z$, z — неотрицательное целое число. Тогда $2z + 2y = 50, z + y = 25$. Последнее соотношение явно имеет 26 решений: (0; 25), (1; 24), …, (25; 0), каждому из которых соответствует решение данного уравнения.

- Сколько точек, обе координаты которых — натуральные числа, лежат на графике функции $y = 50 - 2x$?

  Ответ: 26.

  Решение. Точка (0; 25) — самая левая из искомых. Увеличивая абсциссу на 1, ордината уменьшается на 2. Ордината может уменьшаться только 50 : 2 = 25 раз, значит, помимо указанной точки есть еще 25 точек. Искомое количество 1 + 25 = 26.

Далее предлагаем ученикам попробовать самостоятельно разобраться с аналогичными, но немного более сложными, случаями.

1. Сколькими способами 100 руб. можно разменять монетами достоинством 3 руб. и 5 руб.?

   Ответ: 7 способами.

   Решение. Разменяем 100 руб. 20-тью монетами по 5 руб. (это способ № 1). Следующий способ получится, если мы заменим несколько таких монет другими (по 3 руб.). Минимальная такая сумма — 15 руб., то есть, надо поменять 3 шт. по 5 руб. на 5 шт. по 3 руб. Так как 20 : 3 = 6 (ост. 2), то такие замены можно сделать только 6 раз. Итого 1 + 6 = 7 способов.

2. Восьмиклассница Оля отлично успевает по математике. В дневнике у неё только пятерки и четверки, причем пятерок больше. Сумма всех оценок Оли по математике равна 47. Сколько она получила пятерок и сколько четверок?

   Ответ: 7 пятерок и 4 четверки.

   Решение. Так как 47 : 4 = 11 (ост. 3), то более 11 оценок быть не может, при этом могло быть 11 оценок, из которых 3 пятерки. Могло быть 10 оценок, из которых 7 пятерок. Менее 10 оценок не могло быть, так как 9 · 5 < 47.

   Замечание. Здесь надо найти решения в целых неотрицательных числах уравнения $4a + 5b = 47$, где $b > a$.

3. Куплены фломастеры по 7 рублей и карандаши по 4 рубля за штуку, всего на сумму 51 рубль. Сколько куплено фломастеров и карандашей?

   Ответ: 11 карандашей, 1 фломастер или 4 карандаша и 5 фломастеров.

   Решение. Так как 51 : 7 = 7 (ост. 2), то всего куплено не более 7 фломастеров. Если куплено 0, 1, 2, …, 7 фломастеров, то на карандаши остаётся 51, 44, 37, 30, 23, 16, 9 или 2 рубля — нужны значения, кратные 4. Это 44 и 16. Эти случаи соответствуют 11 карандашам и 1 фломастеру, 4 карандашам и 5 фломастерам.

4. Вовочка купил ручки по 8 рублей и карандаши по 5 рублей. Причем за все карандаши он заплатил на 19 рублей больше, чем за все ручки. Сколько ручек и сколько карандашей купил Вовочка, если их всего не более 20?

   Решение. Пусть Вовочка купил a ручек и b карандашей. Тогда, согласно условию, $5b = 8a + 19$. Можно подобрать наименьшее решение: $8a + 19$ оканчивается на 0 или 5, $8a$ оканчивается на 1 или 6, a оканчивается на 2 или 7. При $b = 2$ получаем $a = 7$ — всего 2 + 7 = 9 штук. Есть ли иные решения?

   Из соотношения $5a = 8b + 19$ видно, что левая часть с ростом a увеличивается на число, кратное 5, а правая с увеличением b — на число кратное 8. Значит, равное увеличение может произойти только минимум на НОК (5; 8) = 40, при этом a

увеличивается на 8, b увеличивается на 5. То есть, все решения описываются формулами $a = 7 + 8n, b = 2 + 5n$, где n — целое неотрицательное число.

Всего куплено не более 20 штук, откуда получаем:
$a + b = (7 + 8n) + (2 + 5n) = 9 + 13n < 20$, то есть $n = 0$.
Вывод: иных решений нет.

5. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

Ответ: можно.

Решение. Например, можно заплатить 3 монетами по 27 тугриков и получить сдачу 5 монетами по 16 тугриков.

Замечание. Нужно найти хотя бы одно решение уравнения $|16a - 27b| = 1$ в целых неотрицательных числах.

Аналогично рассуждениям в решениях предыдущих задач, можно получить такие решения уравнения:
если $16a - 27b = 1$, то $a = 22 + 27n, b = 13 + 16n$, n — натуральное число,
если $27b - 16a = 1$, то $a = 3 + 16n, b = 5 + 27n$, n — натуральное число.
При любом n будет свой пример.

Источник: муниципальный тур ВОШ (2014-2015 уч. год).

6. Прямая на координатной плоскости проходит через точки (2; 18) и (–185; 137).

(а) Укажите еще несколько точек с целыми координатами, через которые проходит эта прямая.

(б) Сколько точек с целыми координатами лежит на отрезке с концами в указанных точках?

Указание. Как искать другие точки на такой прямой? Рассмотрим две данные точки. Когда абсцисса увеличилась на 185 + 2 = 187, то ордината уменьшилась на 137 – 18 = 119.

Заметим, что НОД (119; 187) = 17, то есть 187 = 11 · 17, 119 = 7 · 17.

Значит, от точки (–185; 137) до точки (2; 18) прямая 17 раз делала один и тот же «шаг»: абсцисса увеличивалась на 11, ордината уменьшалась на 7. То есть, на указанной прямой лежат точки $(-185 + 11n; 137 - 7n)$, где n — произвольное целое число. Не трудно заметить, что на отрезке прямой между такими соседними точками других целочисленных точек нет.

(а) Ответ: (–174; 130), (–163; 123), ….

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Указание. Первая указанная в ответе точка получается по полученной выше формуле при $n = 1$, вторая — при $n = 2$. Этот ряд можно продолжать не только «вперед», рассматривая $n = 3, 4, 5, \ldots$, но и «назад», рассматривая $n = -1, -2, \ldots$.

(б) Ответ: 16 точек.

Указание. По указанной выше формуле точка (–185; 137) получается при $n = 0$, точка (2; 18) — при $n = 17$. Между ними лежат точки при $n = 1, 2, 3, \ldots, 16$ — их 16 штук.

7. Решите ребус: 4 · ДУБЛОМ = 3 · ЛОМДУБ. Решить ребус — заменить одинаковые буквы равными цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным.

Ответ: ДУБ = 428, ЛОМ = 571.

Решение. Обозначим $x =$ ДУБ, $y =$ ЛОМ.

Тогда ДУБЛОМ $= 1000x + y$, ЛОМДУБ $= 1000y + x$.

Из условия $4(1000x + y) = 3(1000y + x)$, откуда $3997x = 2996y$, $571x = 428y$. Так как НОД (571, 428) = 1, то $x = 428, y = 571$.

Источник. олимпиада памяти Чуя (Ярославль, 2006 год).