Блок 9. Комбинаторика и вероятность

Интернет-карусель (2020–2021). Задания

1. Петя кинул 2 стандартных игральных кубика. Найдите вероятность того, что у него в сумме выпадет 7 очков.

2. Петя кинул 2 стандартных игральных кубика. Найдите вероятность того, что у него в сумме выпадет не менее 7 очков.

3. Петя 3 раза бросает стандартный игральный кубик. Какова вероятность того, среди результатов хотя бы 1 раз выпало 6 очков?

4. Петя N раз бросает стандартный игральный кубик. При каком минимальном N вероятнее, что хотя бы 1 раз выпало 6 очков, нежели, что 6 очков не выпадет ни разу?

5. Робот выбирает 2 произвольные клетки доски 5×5 и красит их в красный цвет. С какой вероятностью эти клетки имеют общую сторону?

6. Робот выбирает 2 произвольные клетки доски 5×5 и красит их в красный цвет. С какой вероятностью эти клетки не имеют ни общей стороны, ни общей вершины?

7. Вася кидает монетку 5 раз. Какова вероятность того, что два раза подряд выпадет орел?

8. Петя загадал двузначное (натуральное) число. Вася наугад называет двузначное число. С какой вероятностью числа совпадут хотя бы в одном из разрядов?

9. Петя загадал трёхзначное (натуральное) число. Вася наугад называет трёхзначное число. С какой вероятностью числа совпадут хотя бы в одном из разрядов?

10. Дано уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$. В качестве a и b случайным образом ставят натуральные числа от 1 до 10. С какой вероятностью уравнение будет иметь корень?

11. Васе дают клетчатый прямоугольник $A \times B$, где A и B — произвольные натуральные числа от 1 до 10. С какой вероятностью он сможет из данного ему прямоугольника вырезать (по сторонам клеток) квадрат 3×3?

12. Васе дают клетчатый прямоугольник с периметром 100 (длина стороны одной клетки — 1). Любые два неравных прямоугольника могут ему достаться с равной вероятностью. С какой вероятностью Вася сможет из данного ему прямоугольника вырезать (по сторонам клеток) квадрат 7×7?

13. На математическом кружке учитель делит 20 школьников на 3 команды, в которых 5, 6 и 9 человек. Ученица Маша задумалась, с какой вероятностью она попадёт в самую большую (по числу человек) команду. Каков ответ на её вопрос?

14. На математическом кружке учитель делит 20 школьников на 3 команды, в которых 6, 7 и 7 человек. Ученица Маша задумалась, с какой вероятностью она попадёт в команду из 7 человек. Каков ответ на её вопрос?

15. На математическом кружке учитель просит встать в шеренгу команду, в которой Саша, Маша и еще четверо. Они встают произвольно в ряд. С какой вероятностью Саша и Маша будут стоять рядом?

16. На математическом кружке учитель просит встать в шеренгу команду, в которой Саша, Маша и еще четверо. Они встают произвольно в ряд. С какой вероятностью между Сашей и Машей окажется менее 3 человек?

Блок 9. Комбинаторика и вероятность

Интернет-карусель (2020–2021). Задания, ответы, решения

Все ответы в заданиях приведены в соответствии с указанием на интернет-карусели. Там предлагалось вводить дробное число, оставляя в нём только 2 цифры после запятой (не округлять).

1. Петя кинул 2 стандартных игральных кубика. Найдите вероятность того, что у него в сумме выпадет 7 очков.

   Ответ: 0,16.

   Решение. Всего $6 \cdot 6 = 36$ возможных исходов. Сумма равна 7, когда выпадает 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1 — всего 6 исходов. Искомая вероятность равна $6/36 = 1/6 = 0{,}1(6) \approx 0{,}16$.

2. Петя кинул 2 стандартных игральных кубика. Найдите вероятность того, что у него в сумме выпадет не менее 7 очков.

   Ответ: 0,58.

   Решение. Всего $6 \cdot 6 = 36$ возможных исходов. Их можно изобразить в виде таблицы, показанной справа. Крестиком отмечены верные исходы, их 21. Искомая вероятность равна $21/36 = 7/12 = 0{,}58(3) \approx 0{,}58$.

	1	2	3	4	5	6
1						X
2					X	X
3				X	X	X
4			X	X	X	X
5		X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X	X

3. Петя 3 раза бросает стандартный игральный кубик. Какова вероятность того, среди результатов хотя бы 1 раз выпало 6 очков?

   Ответ: 0,42.

   Решение. Всего 6^3 возможных исходов. Всего 5^3 исходов, когда ни разу не выпало 6 очков. Искомая вероятность равна $1 - (5/6)^3 \approx 0{,}42$.

4. Петя N раз бросает стандартный игральный кубик. При каком минимальном N вероятнее, что хотя бы 1 раз выпало 6 очков, нежели, что 6 очков не выпадет ни разу?

   Ответ: 4.

   Решение. Всего 6^N возможных исходов. Всего 5^N исходов, когда ни разу не выпало 6 очков. Искомая вероятность равна $1 - (5/6)^N$. При увеличении N вероятность увеличивается. Так как $1 - (5/6)^3 \approx 0{,}42 < 0{,}5$, $1 - (5/6)^4 \approx 0{,}51 > 0{,}5$, то искомое значение $N = 4$.

5. Робот выбирает 2 произвольные клетки доски 5×5 и красит их в красный цвет. С какой вероятностью эти клетки имеют общую сторону?

   Ответ: 0,13.

   Решение. В каждой строке и каждом столбце 4 пары соседних клеток. Значит, всего $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ пар соседних по стороне клеток. Две клетки можно выбрать $25 \cdot 24 : 2 = 300$ способами. Искомая вероятность $40/300 = 4/30 = 0{,}1(3) \approx 0{,}13$.

6. Робот выбирает 2 произвольные клетки доски 5×5 и красит их в красный цвет. С какой вероятностью эти клетки не имеют ни общей стороны, ни общей вершины?

   Ответ: 0,76.

   Решение. Произвольные две клетки можно выбрать $25 \cdot 24 : 2 = 300$ способами. Всего $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ пар соседних по стороне клеток. Квадрат 2×2 можно указать 16 способами, в каждом квадрате 2 пары клеток с одной общей вершиной. Значит, всего $16 \cdot 2 = 32$ пар клеток с одной общей вершиной. Плохих исходов $40 + 32 = 72$. Искомая вероятность $1 - 72/300 = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

7. Вася кидает монетку 5 раз. Какова вероятность того, что два раза подряд выпадет орел?

   Ответ: 0,59.

   Решение. Всего $2^5 = 32$ возможных исхода. Найдём число плохих исходов. Когда выпадала только решка — 1 вариант, когда ровно один орёл — 5 вариантов. Вариантов, когда выпало ровно два орла и они не соседние, — 6 штук: ОРОРР, ОРРОР, ОРРРО, РОРОР, РОРРО, РРОРО. Вариант, когда выпало три орла и нет соседних, — один (ОРОРО). Итого 13 вариантов.
   Искомая вероятность $1 - 13/32 = 0{,}59375 \approx 0{,}59$.

8. Петя загадал двузначное (натуральное) число. Вася наугад называет двузначное число. С какой вероятностью числа совпадут хотя бы в одном из разрядов?

   Ответ: 0,2.

   Решение. Всего 90 двузначных чисел. С каждым числом в разряде десятков совпадает 9 других чисел, в разряде единиц — 8 других чисел. Всего, с учетом самого числа, — $9 + 8 + 1 = 18$ штук. Искомая вероятность равна $18/90 = 0{,}2$.

9. Петя загадал трёхзначное (натуральное) число. Вася наугад называет трёхзначное число. С какой вероятностью числа совпадут хотя бы в одном из разрядов?

   Ответ: 0,28.

   Указание. Не так просто найти количество чисел, которые совпадают с данным хотя бы в одном разряде. В разряде сотен с числом совпадают 99 других чисел, в разряде десятков и единиц — по 89 других чисел. Подумайте, почему общее количество меньше, чем $99 + 89 + 89 + 1 = 278$.

Решение. Всего 900 трёхзначных чисел — это общее число исходов. Всего $8 \cdot 9 \cdot 9$ чисел, которые не совпадают с данным ни в одном из разрядов, — это плохие исходы. Искомая вероятность равна $1 - 8 \cdot 9 \cdot 9 : 900 = 1 - 72/100 = 0{,}28$.

10. Дано уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$. В качестве a и b случайным образом ставят натуральные числа от 1 до 10. С какой вероятностью уравнение будет иметь корень?

Ответ: 0,84.

Решение. Должно выполняться $D = 4(a^2 - b) \geq 0$, откуда $a^2 \geq b$. Есть только 16 пар $(a; b)$, для которых это неверно: (1; 2), …, (1; 10), (2; 5), …, (2; 10), (3; 10). Всего пар $(a; b)$ — $10 \cdot 10 = 100$ штук, из которых 16 плохих. Искомая вероятность равна $1 - 16/100 = 0{,}84$.

11. Васе дают клетчатый прямоугольник $A \times B$, где A и B — произвольные натуральные числа от 1 до 10. С какой вероятностью он сможет из данного ему прямоугольника вырезать (по сторонам клеток) квадрат 3×3?

Ответ: 0,64.

Решение. Всего $10 \cdot 10 = 100$ различных прямоугольников $A \times B$. Длина каждой стороны прямоугольника должна быть не менее 3. Для выбора длины и ширины есть по 8 возможных значений. Искомая вероятность равна $8 \cdot 8 : 100 = 0{,}64$.

Комментарий. Можно обсудить, каков будет результат, если количество исходов — не пары чисел от 1 до 10, а попарно различные клетчатые прямоугольники со сторонами не более 10. Тогда будет 55 прямоугольников, из них не подойдёт 36. Вероятность равна $36/55 \approx 0{,}65$, что не сильно отличается от варианта, описанного в задаче.

12. Васе дают клетчатый прямоугольник с периметром 100 (длина стороны одной клетки — 1). Любые два неравных прямоугольника могут ему достаться с равной вероятностью. С какой вероятностью Вася сможет из данного ему прямоугольника вырезать (по сторонам клеток) квадрат 7×7?

Ответ: 0,76.

Решение. Всего 25 возможных прямоугольников 1×49, 2×48, …, 25×25, из которых не подходят только первые 6 штук. Искомая вероятность равна $1 - 6 : 25 = 0{,}76$.

13. На математическом кружке учитель делит 20 школьников на 3 команды, в которых 5, 6 и 9 человек. Ученица Маша задумалась, с какой вероятностью она попадёт в самую большую (по числу человек) команду. Каков ответ на её вопрос?

Ответ: 0,45.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Решение. Будем считать, что учитель строит ребят в ряд, а потом первых 9 человек в ряду образуют большую команду. Маша может равновероятно получить любое из 20 мест. Значит, искомая вероятность равна $9/20 = 0{,}45$.

14. На математическом кружке учитель делит 20 школьников на 3 команды, в которых 6, 7 и 7 человек. Ученица Маша задумалась, с какой вероятностью она попадёт в команду из 7 человек. Каков ответ на её вопрос?

Ответ: 0,70.

Решение. Будем считать, что учитель строит ребят в ряд, а потом первые 14 человек в ряду образуют 2 команды по 7 человек. Маша может равновероятно получить любое из 20 мест. Значит, искомая вероятность равна $14/20 = 0{,}70$.

15. На математическом кружке учитель просит встать в шеренгу команду, в которой Саша, Маша и еще четверо. Они встают произвольно в ряд. С какой вероятностью Саша и Маша будут стоять рядом?

Ответ: 0,33.

Решение. Есть $6! = 720$ способов, как могут встать в ряд 6 человек, — это общее число исходов. Соседние места для Саши и Маши можно выбрать 5 способами (1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6), в каждом из них они могут стоять рядом 2 способами. Остальные могут занять свободные места $4! = 24$ способами. Значит, имеется $10 \cdot 4! = 240$ положительных исходов.

Искомая вероятность равна $240 : 720 = 1/3 \approx 0{,}3$.

16. На математическом кружке учитель просит встать в шеренгу команду, в которой Саша, Маша и еще четверо. Они встают произвольно в ряд. С какой вероятностью между Сашей и Машей окажется менее 3 человек?

Ответ: 0,8.

Решение. Есть $6! = 720$ способов, как могут встать в ряд 6 человек, — это общее число исходов. Найдём число вариантов мест для Саши и Маши: 5 штук — если они соседи, 4 штуки — если между ними 1 человек, 3 штуки — если между ними 2 человека. В каждом из них они могут стоять рядом 2 способами. Остальные могут занять свободные места $4! = 24$ способами. Всего $2 \cdot (5 + 4 + 3) \cdot 4! = 576$ положительных исходов. Искомая вероятность равна $576 : 720 = 0{,}8$.