Блок 13. Подсчёт двумя способами

Подготовительное занятие

- В классе прошёл балл, на котором танцевали только одноклассники и все танцы были парными.

  (а) Сколько в классе девочек, если в классе 24 ученика, каждая девочка станцевала два раза, а каждый мальчик — только один раз?

  (б) Каждая девочка станцевала три раза, а каждый мальчик — два раза. Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек?

  (в) Сколько в классе девочек, если в классе 24 учеников, каждая девочка станцевала 3 раз, а каждый мальчик — 5 раз?

- В каждую клетку таблицы 3×3 записали число. В каждой строке сумма чисел равна 5. В первом и втором столбцах сумма равна 6. Чему равна сумма чисел в третьем столбце?

1. В классе 24 ученика. На 8 марта каждый из 11 мальчиков принёс в школу 4 тюльпана. Все тюльпаны подарили девочкам и классному руководителю Марии Ивановне. Каждая девочка получила букет из 3 тюльпанов. Сколько было тюльпанов в букете, который подарили Марии Ивановне?

2. В классе 25 учеников. На 23 февраля каждая из 10 девочек класса написала поздравления ровно трём мальчикам из класса. Все мальчики получили поровну поздравлений. Сколько поздравлений получил каждый мальчик?

3. (а) В прямоугольной таблице расставлены числа. В ней 10 строк, сумма чисел в каждой строке равна 30. Сумма чисел в каждом столбце равна 20. Сколько в таблице столбцов?

   (б) Можно ли в прямоугольной таблице 5 × 10 так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой из 5 строк равнялась 30, а сумма чисел в каждом из 10 столбцов равнялась 10?

   (в) В прямоугольной таблице 8 × 15 расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой из 8 строк равна 10. Может ли оказаться, что суммы чисел во всех столбцах равны?

4. В классе каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Ещё известно, что в классе 19 парт, а вчера 31 ученик класса побывал в музее на выставке Ван Гога. Сколько человек в этом классе?

5. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма чисел была равна 120?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

6. Рёбра куба занумеровали натуральными числами от 1 до 12. Для каждой вершины куба нашли сумму номеров рёбер, которые в ней сходятся.

   (а) Семь из сумм в вершинах равны 9, 13, 14, 15, 23, 34, 25. Чему равна сумма в восьмой вершине?

   (б) Могут ли три суммы в вершинах быть чётными, а остальные пять — нечётными?

   (в) Могут ли суммы в вершинах куба быть одинаковыми?

7. В каждой вершине шестиугольника записали число. На каждой стороне шестиугольника записали сумму чисел на концах стороны. Затем стерли все числа в вершинах и число на одной из сторон. Можно ли однозначно восстановить стёртое число на стороне?

Блок 13. Подсчёт двумя способами

Подготовительное занятие

Подсчёт двумя способами полезен в нескольких аспектах. Во-первых, он помогает решать арифметические задачи, где порой полезно найти величину, которую напрямую не просят. Во-вторых, он помогает естественным образом доказывать, что что-то не существует. Примеры и того, и другого представлены в задачах. Задача № 7 потребует сформулировать общий алгоритм нахождения неизвестного числа.

Решения задач, отмеченных точкой, рекомендуем обсудить в начале занятия. Они помогут решать первые из заданий для самостоятельного решения. В ходе занятия можно разобрать также решение задачи № 3 (б) для тех, кто не справился с ней самостоятельно. Она служит примером, как доказывать отсутствие чего-либо.

- В классе прошёл бал, на котором танцевали только одноклассники и все танцы были парными.

  (а) Сколько в классе девочек, если в классе 24 ученика, каждая девочка станцевала два раза, а каждый мальчик — только один раз?

    Ответ: 8.

    Решение. Количество танцев в 2 раза больше, чем число девочек, и равно числу мальчиков. Значит, девочек вдвое больше, чем мальчиков.

    Если девочек d человек, то мальчиков $2d$ человек. Тогда $d + 2d = 3d = 24$, откуда $d = 8$.

    Комментарий. Обратите внимание, что количество танцев служит вспомогательным числом, которое связывает число мальчиков и число девочек.

  (б) Каждая девочка станцевала три раза, а каждый мальчик — два раза. Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек?

    Ответ: в полтора раза.

    Решение. Как и в пункте (а) найдём количество танцев через d — количество девочек и m — количество мальчиков. Оно равно $3d$ и равно $2m$. Из равенства $3d = 2m$ следует, что $m : d = 3/2$. Значит, мальчиков больше в полтора раза.

    Комментарий 1. Обратите внимание, что количество танцев служит вспомогательным числом, которое связывает число мальчиков и число девочек.

    Комментарий 2. Удобно из равенства $3d = 2m$ делать вывод, что девочек 2 части, а мальчиков 3 такие же части.

  (в) Сколько в классе девочек, если в классе 24 учеников, каждая девочка станцевала 3 раз, а каждый мальчик — 5 раз?

    Ответ: 8.

    Решение. Как и в пункте (а) найдём количество танцев через d — количество девочек и m — количество мальчиков. Оно равно $3d$ и равно $5m$. Из равенства $3d = 5m$ следует, что девочек 5 частей, а мальчиков 3 такие же части. Обозначим одну часть за n. Тогда $d + m = 5n + 3n = 8n = 24$, откуда $n = 3$. Значит, в классе $5n = 15$ девочек.

- В каждую клетку таблицы 3×3 записали число. В каждой строке сумма чисел равна 5. В первом и втором столбцах сумма равна 6. Чему равна сумма чисел в третьем столбце?

    Ответ: 3.

    Решение. Сумма чисел во всей таблице равна $5 + 5 + 5 = 15$, так как можно сложить суммы чисел в каждой из строк. Если в первых двух столбцах сумма 6, то в третьем она равна $15 - 6 - 6 = 3$.

    Комментарий. В таких задачах не требуется показывать, что такая таблица существует. Но рекомендуем предложить ученикам заполнить таблицу, чтобы выполнялось условие задачи. Один из примеров показан справа.

5	0	0
1	4	0
0	2	3

1. В классе 24 ученика. На 8 марта каждый из 11 мальчиков принёс в школу 4 тюльпана. Все тюльпаны подарили девочкам и классному руководителю Марии Ивановне. Каждая девочка получила букет из 3 тюльпанов. Сколько было тюльпанов в букете, который подарили Марии Ивановне?

    Ответ: 5.

    Решение. Мальчики принесли $11 \cdot 4 = 44$ тюльпана. В классе $24 - 11 = 13$ девочек. Девочки получили $13 \cdot 3 = 39$ тюльпанов. Значит, Марии Ивановне подарили $44 - 39 = 5$ цветков.

2. В классе 25 учеников. На 23 февраля каждая из 10 девочек класса написала поздравления ровно трём мальчикам из класса. Все мальчики получили поровну поздравлений. Сколько поздравлений получил каждый мальчик?

    Ответ: 2.

    Решение. Всего девочки подготовили $10 \cdot 3 = 30$ поздравлений. В классе $25 - 10 = 15$ мальчиков. Каждый получил по $30 : 15 = 2$ поздравления.

3. (а) В прямоугольной таблице расставлены числа. В ней 10 строк, сумма чисел в каждой строке равна 30. Сумма чисел в каждом столбце равна 20. Сколько в таблице столбцов?

Ответ: 15.

Решение. Сумма чисел, расставленных в таблице, равна $30 \cdot 10 = 300$. Значит, в таблице $300 : 20 = 15$ столбцов.

(б) Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой из 5 строк равнялась 30, а сумма чисел в каждом из 10 столбцов равнялась 10?

Ответ: нельзя.

Решение. В такой таблице сумма всех чисел должна быть равна, с одной стороны, $30 \cdot 5 = 150$, с другой стороны, $10 \cdot 10 = 100$. Противоречие.

(в) В прямоугольной таблице 8×15 расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой из 8 строк равна 10. Может ли оказаться, что суммы чисел во всех столбцах равны?

Ответ: нет, не может.

Решение. В такой таблице сумма всех чисел равна $8 \cdot 10 = 80$. Сумма чисел в каждом столбце должна быть целой. С другой стороны, она должна быть равна $80 : 15$, что не является целым числом. Противоречие.

4. В классе каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Ещё известно, что в классе 19 парт, а вчера 31 ученик класса побывал в музее на выставке Ван Гога. Сколько человек в этом классе?

Ответ: 35.

Решение. Найдём количество пар друзей «мальчик-девочка» в классе через d — количество девочек и m — количество мальчиков. Оно равно $3d$ и равно $2m$. Из равенства $3d = 2m$ следует, что мальчиков $3n$ человек, а девочек $2n$ человек. Тогда в классе $3n + 2n = 5n$ человек — число, которое делится на 5.

С другой стороны, в классе не менее 31 ученика, но не более чем мест за 19 партами, то есть не более $2 \cdot 19 = 38$ учеников. Среди чисел от 31 до 38 только 35 делится на 5.

Значит, в классе 35 учеников.

5. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма чисел была равна 120?

Ответ: нельзя.

Решение. Сумма всех чисел равна

$$1 + 2 + \ldots + 64 = (1 + 64) + (2 + 63) + \ldots + (32 + 33) = 32 \cdot 65 = 2080.$$

С другой стороны, доску можно разбить на 16 квадратов 2×2. Значит, сумма чисел на доске должна быть равной $16 \cdot 120 = 1920$.

Противоречие: числа 2080 и 1920 не равны.

6. Рёбра куба занумеровали натуральными числами от 1 до 12. Для каждой вершины куба нашли сумму номеров рёбер, которые в ней сходятся.

(а) Семь из сумм в вершинах равны 9, 13, 14, 15, 23, 24, 25. Чему равна сумма в восьмой вершине?

Ответ: 33.

Решение. Сумма чисел, проставленных на ребрах, равна $1 + 2 + \ldots + 12 = 78$. Сумма чисел в вершинах в 2 раза больше, так как номер каждого ребра входит в две суммы в вершинах. Она равна $78 \cdot 2 = 156$. Значит, в восьмой вершине стоит сумма $156 - (9 + 13 + 14 + 15 + 23 + 24 + 25) = 33$.

Комментарий. Каковы номера ребер, которые сходятся в указанной восьмой вершине?

(б) Могут ли три суммы в вершинах быть чётными, а остальные пять — нечётными?

Ответ: не могут.

Решение. Сумма чисел в вершинах в 2 раза больше суммы всех номеров, так как номер каждого ребра входит в две суммы в вершинах. Значит, она чётна. В сумма трёх чётных чисел и пяти нечётных чисел является нечётной.

(в) Могут ли суммы в вершинах куба быть одинаковыми?

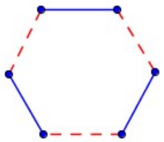
Ответ: нет, не могут.

Решение. Сумма чисел, проставленных на ребрах, равна $1 + 2 + \ldots + 12 = 78$. Сумма чисел в вершинах в 2 раза больше, так как номер каждого ребра входит в две суммы в вершинах. Она равна $78 \cdot 2 = 156$. Тогда сумма в каждой вершине должна быть равной $156 : 8 = 19{,}5$. Сумма целых чисел не может быть равной нецелому числу. Противоречие.

7. В каждой вершине шестиугольника записали число. На каждой стороне шестиугольника записали сумму чисел на концах стороны. Затем стерли все числа в вершинах и число на одной из сторон. Можно ли однозначно восстановить стёртое число на стороне?

Ответ: можно.

Решение. Сумма чисел на сторонах, проведенных штрихами (рисунок справа), равна сумме чисел на трёх других сторонах, так как обе равны сумме чисел в вершинах шестиугольника.



Пусть стёрли число на «штрихованной» стороне. Тогда сложим числа на «сплошных» сторонах, а из суммы вычтем числа на двух известных «штрихованных» сторонах.