Блок 14. Десятичная запись числа

Подготовительное занятие

Задания

- Какое натуральное число в 7 раз больше своей последней цифры?
- Сумма двух чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.
- Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 15.

1. Найдите все двузначные числа, которые вдвое больше своей суммы цифр.
2. В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трехзначное. Найдите это число.
3. Найдите наименьшее четное десятизначное число, все цифры которого различны.
4. Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 17.
5. Известно, что если к двузначному числу прибавить его сумму цифр, то получится число с теми же цифрами, но записанными в обратном порядке. Найдите исходное двузначное число.
6. Между цифрой единиц и цифрой десятков двузначного числа вставили ноль, и оказалось, что полученное число в девять раз больше исходного. Найти исходное число.
7. В некотором числе зачеркнули последнюю цифру так, что оно уменьшилось на 2018. Каким могло быть это число?
8. Из трех цифр, отличных от 0, составили два трехзначных числа: наибольшее и наименьшее возможное. Их разность оказалась равна 693. Чему может быть равна наибольшая из этих 3 цифр?
9. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

Блок 14. Десятичная запись числа

Подготовительное занятие

Задания

- Какое натуральное число в 7 раз больше своей последней цифры?
- Сумма двух чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.
- Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 15.

1. Найдите все двузначные числа, которые вдвое больше своей суммы цифр.
2. В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трехзначное. Найдите это число.
3. Найдите наименьшее четное десятизначное число, все цифры которого различны.
4. Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 17.
5. Известно, что если к двузначному числу прибавить его сумму цифр, то получится число с теми же цифрами, но записанными в обратном порядке. Найдите исходное двузначное число.
6. Между цифрой единиц и цифрой десятков двузначного числа вставили ноль, и оказалось, что полученное число в девять раз больше исходного. Найти исходное число.
7. В некотором числе зачеркнули последнюю цифру так, что оно уменьшилось на 2018. Каким могло быть это число?
8. Из трех цифр, отличных от 0, составили два трехзначных числа: наибольшее и наименьшее возможное. Их разность оказалась равна 693. Чему может быть равна наибольшая из этих 3 цифр?
9. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

karusel.desc.ru ~ 613 ~

Блок 14. Десятичная запись числа

Подготовительное занятие

Ответы, решения

Цели занятия — приучить школьников условия задач про числа представлять в виде соотношений между цифрами, использовать правила сравнения натуральных чисел.

Полезно привыкнуть записывать числа как десятичную запись, например, четырёхзначное число, составленное из цифр a, b, c, d (в указанном порядке) записывается $\overline{abcd}$. Иногда удобно записывать число, как объединение записей чисел. Например, если $a = 12$, $b = 34$, то подразумевается, что $\overline{ab} = 1234$.

При решении задачи удобно число записать в виде выражения:
$\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, ….

От учеников 5 и 6 классов потребуется умение записывать несложные выражения с несколькими переменными и упрощать их.

Предлагаем сначала совместно разобрать решения задач, отмеченных точкой, а затем дать возможность ученикам самостоятельно решать задачи с номерами. Для «подсказки» в процессе самостоятельного решения можно разобрать задачи № 4 и № 5.

- Какое натуральное число в 7 раз больше своей последней цифры?

    Ответ: 35.

    Решение (перебор). Есть 10 вариантов того, какова последняя цифра числа. Проверим все варианты: $\underline{0 \cdot 7 = 0}$, $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 7 = 28$, $\underline{5 \cdot 7 = 35}$, $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 7 = 49$, $8 \cdot 7 = 56$, $9 \cdot 7 = 63$. Подходят только 2 варианта, в одном из них число (0) не является натуральным. Значит, подходит только случай $5 \cdot 7 = 35$.

    Решение (десятичная запись). Пусть десятичная запись искомого числа $\overline{xy}$.

    Замечание. Если число однозначное, то можно считать $x = 0$, если запись числа имеет более 2 цифр, то число x не является однозначным.

    Тогда $\overline{xy} = 7y$, откуда $10x + y = 7y$ или $5x = 3y$. Из последнего равенства видно, либо $x = 0$, либо $x = 5$. В первом случае искомое число не натуральное, во втором искомое число равно 35.

    Комментарий. При обсуждении этой задачи стоит обратить внимание учеников на три момента.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

(1) Если подбором найден верный ответ, то этого недостаточно. Нужно найти *все* числа, удовлетворяющие условию задачи. Отсюда следует, если ответ предъявлен, необходимо пояснить, *почему нет других чисел*, удовлетворяющих условию.

(2) Решение переборов вариантов не хуже и не лучше любого другого. Но если выбран путь перебора, то нужно приводить все варианты (независимо от того, насколько они очевидны). Рассуждения типа «в этом случае получается, а в других не получается» не является решением, если все варианты не приведены. Поэтому, переборные решения обычно более трудоёмки.

(3) Одна из целей занятия — продемонстрировать, что удобно записать число в виде выражения с его цифрами. Если ученики предпочитают перебирать, это их выбор.

- Сумма двух чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

    Ответ: 431 и 43.

    Решение (десятичная запись). Первое число имеет вид $\overline{a1}$, где a — второе искомое число. Из условия следует, что $\overline{a1} + a = 474$, откуда $(10a + 1) + a = 474$, $11a = 473$, $a = 43$. Значит, искомые числа $\overline{a1} = 431$ и $a = 43$.

    Решение (ребус). Не трудно понять, что первое из чисел — трёхзначное, второе — двухзначное. Тогда данная задача сводится к решению ребуса АВ1 + АВ = 474, где буквами А и В заменены две цифры (возможно, равные).

    Тогда нетрудно понять сначала цифру В, затем — цифру А:

    $$+\begin{array}{r} A\,B\,1 \\ A\,B \\ \hline 4\,7\,4 \end{array} \Rightarrow +\begin{array}{r} A\,3\,1 \\ A\,3 \\ \hline 4\,7\,4 \end{array} \Rightarrow +\begin{array}{r} 4\,3\,1 \\ 4\,3 \\ \hline 4\,7\,4 \end{array}$$

- Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 15.

    Ответ: 543210.

    Указание. Вспомните, как сравнивать числа по их десятичной записи. Сначала надо сравнить количество цифр, чем оно больше, тем больше само число. Если цифр поровну, надо найти самый старший разряд, в котором записи отличаются.

    Решение. Заметим, что в числе не может быть более 6 цифр, иначе сумма цифр будет не менее $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Сумма 6 самых маленьких различных цифр равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, поэтому шестизначное число с суммой цифр 15 состоит из цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Число будет наибольшим, если цифры идут в порядке убывания. Значит, наибольшее число 543210.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите все двузначные числа, которые вдвое больше своей суммы цифр.

Ответ: 18.

Решение. Если $\overline{xy}$ — искомое число, то $\overline{xy} = 2(x + y)$, откуда $10x + y = 2x + 2y$, $8x = y$. Из последнего следует, либо $x = 1$ и $y = 8$, либо обе цифры «0» (что невозможно).

2. В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трехзначное. Найдите это число.

Ответ: 350.

Решение. Если $\overline{xyz}$ — искомое число, то $\overline{xyz} = 7\overline{yz}$, откуда $100x + \overline{yz} = 7\overline{yz}$ или $50x = 3\overline{yz}$. Из последнего следует, что $\overline{yz} = 50$, $x = 3$.

3. Найдите наименьшее четное десятизначное число, все цифры которого различны.

Ответ: 1023456798.

Решение. Если число 10-значное, а его цифры различны, значит в его записи есть все возможные цифры. Наименьшая первая цифра — 1, следующая — 0, и так далее. Предпоследняя цифра не может быть 8, иначе числа будет 1023456789, то есть нечётным. Значит, наименьшая возможная предпоследняя цифра — 9, а само наименьшее число 1023456798.

4. Найдите наибольшее число, у которого все цифры различны, а сумма цифр равна 17.

Ответ: 743210.

Указание. Удобно найти наибольшее число и показать, что большего числа нет.

Решение. Покажем, что число 743210 наибольшее.
(1) В числе не может быть более 6 цифр, иначе сумма цифр будет не менее $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
(2) Первая цифра не может быть больше 7, иначе сумма его цифр будет не менее $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$.
(3) Если первая цифра 7, то сумма остальных 5 цифр равна $17 – 7 = 10$. Сумма пяти самых маленьких различных цифр равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, поэтому остальные цифры числа 0, 1, 2, 3 и 4. Число будет наибольшим, если цифры идут в порядке убывания. Значит, наибольшее число 743210.

5. Известно, что если к двузначному числу прибавить его сумму цифр, то получится число с теми же цифрами, но записанными в обратном порядке. Найдите исходное двузначное число.

Ответ: 45.

Решение. Если $\overline{xy}$ — искомое число. Из условия задачи $\overline{xy} + x + y = \overline{yx}$, откуда $10x + y + x + y = 10y + x$ или $5x = 4y$. Из последнего следует, что $x = 4$, $y = 5$.

6. Между цифрой единиц и цифрой десятков двузначного числа вставили ноль, и оказалось, что полученное число в девять раз больше исходного. Найти исходное число.

Ответ: 45.

Решение (десятичная запись). Искомое число имеет вид $\overline{xy}$. Из условия следует $\overline{x0y} = 9\overline{xy}$, откуда $100x + y = 90x + 9y$ или $5x = 4y$. Из последнего следует, что $x = 4$, $y = 5$.

7. В некотором числе зачеркнули последнюю цифру так, что оно уменьшилось на 2018. Каким могло быть это число?

Ответ: 2242.

Решение (десятичная запись). Искомое число имеет вид $\overline{abcd}$. Из условия следует $\overline{abcd} = \overline{abc} + 2018$, откуда $10\overline{abc} + d = \overline{abc} + 2018$ или $9\overline{abc} + d = 2018$. Значит, d — остаток при делении 2018 на 9, а $\overline{abc}$ — неполное частное от деления, то есть $\overline{abc} = 224$, $d = 2$.

8. Из трех цифр, отличных от 0, составили два трехзначных числа: наибольшее и наименьшее возможное. Их разность оказалась равна 693. Чему может быть равна наибольшая из этих 3 цифр?

Ответ: 8 или 9.

Решение. Если $x \geq y \geq z$ — цифры искомого числа, то $\overline{xyz}$ — наибольшее число, $\overline{zyx}$ — наименьшее число. По условию $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 693$, откуда следует
$(100x + 10y + z) - (100z - 10y - x) = 693$,
$99x - 99z = 693$,
$x - z = 7$.

Значит, первая цифра больше последней на 7, значит она равна 8 или 9. И то, и другое возможно, так как при любом значении y выполнено $\overline{9y2} - \overline{2y9} = 693$ и $\overline{8y1} - \overline{1y8} = 693$.

Комментарий. В данном случае необходимо привести пример на каждый из полученных ответов. Действительно, надо показать, что нет иных препятствий (кроме тех, что учтены в решении) для того или другого ответа.

9. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

Ответ: 303369.

Решение. Пусть число имеет вид $\overline{abcdef}$.

(1) Если $a \geq 4$, то получаем цепочку выводов: $c = a + b \geq 4$, $d = b + c \geq 4$, $e = c + d \geq 8$, $f = d + e \geq 12$ (противоречие). Значит, цифра a не более 3.

(2) Аналогично получаем, что вторая цифра не более 0. Если $b \geq 1$, то $c = a + b \geq 4$, $d = b + c \geq 5$, $e = c + d \geq 9$, $f = d + e \geq 14$ (противоречие). Значит, $b = 0$.

(3) Тогда число однозначно восстанавливается по правилу, данному в условии: 303369.

Комментарий 1. Обсудите с учениками, какое наибольшее натуральное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

Ответ: 10112358. Указание. Покажите (аналогично рассуждениям в решении задачи), что число имеет не более 8 цифр.

Комментарий 2. Дальнейшее усложнение задачи таково.

Найдите наибольшее число, в котором все цифры различны, а каждая следующая цифра является суммой двух предыдущих.

Ответ: 31459.

Решение. Цифра «0» не может быть на первом месте, не может быть на втором (иначе первая цифра равна третьей), а остальные цифры больше 0.

Докажем, что в таком числе не может быть больше 5 цифр.

Заметим, что вторая цифра не может быть 0, потому что тогда третья цифра будет равна первой. Тогда первые две цифры — как минимум 1 и 2 (в каком-то порядке), третья — как минимум 3, четвертая — как минимум 3 + 1 = 4, пятая — как минимум 3 + 4 = 7, шестая — как минимум 4 + 7 = 11, что уже больше 9.

Значит число пятизначное и имеет вид $\overline{abcde}$. Опять заметим, что b обязательно больше 0 (иначе a=c). Если $a \geq 4$, то $c = a + b \geq 4 + 1 = 5$, $d = c + b \geq 5 + 1 = 6$, $e = d + c \geq 6 + 5 = 11$. Получаем противоречие. Значит $a = 3$.

Аналогично, если $b \geq 2$, то $c = a + b \geq 3 + 2 = 5$, $d = c + b \geq 5 + 2 = 7$, $e = d + c \geq 7 + 5 = 12$. Значит $b = 1$.

Если число начинается на 31, то дальше все однозначно восстанавливается и получаем число 31459.