



Блок 12. Логика

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

Действие задачи происходит на острове рыцарей и лжецов. Здесь живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

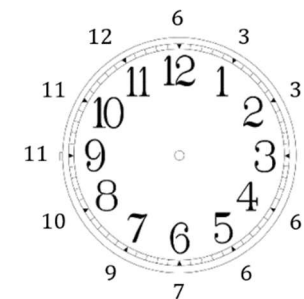
1. В комнате собрались 10 человек — рыцарей и лжецов. Каждый заявил каждому из остальных одну из фраз «Ты — рыцарь» или «Ты — лжец». Первая из этих фраз произнесена 42 раза. Сколько рыцарей среди собравшихся?
2. В группе из 10 человек (рыцарей и лжецов) все разбились на пары. В каждой паре они смогли сказать друг другу фразу «Ты — лжец!». Затем они иначе разбились на пары. В скольких парах могут сказать друг другу «Ты — рыцарь!»?
3. Для статистического эксперимента пригласили рыцарей и лжецов. Каждому задали вопрос: «Среди вас рыцарей больше половины?» Ровно половина тестируемых ответила на этот вопрос «да». Кого на самом деле среди них больше?
4. За круглым столом сидят 57 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них сказал: «Если я поверну голову направо, то среди первых двоих человек обязательно увижу лжеца». Сколько рыцарей среди них?
5. Учительница написала на доске натуральное число. Каждый из 10 учеников — рыцарь или лжец — сказал фразу про это число: «Это число не более 5», «Это число не более 4», ..., «Это число не более 1», «Это число более 5», «Это число более 4», ..., «Это число более 1». Сколько среди этих 10 учеников лжецов?
6. За круглым столом собралось 100 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них заявил: «Мои соседи — рыцарь и лжец». При этом 15 рыцарей ошиблись: их считают рыцарями, но они сказали неправду. Сколько могло быть лжецов?
7. В группе из 13 человек (рыцарей и лжецов) каждый заявил про себя «Я — рыцарь!» или «Я — лжец!». Сколько было заявлений «Я — рыцарь!»?
8. В каждой клетке квадрата 3×3 живет рыцарь или лжец. Каждого спросили, сколько лжецов среди его соседей (живущих в соседней по стороне клетке). Все ответили «один». А сколько всего может быть лжецов?
9. За столом сидят 10 человек — рыцари и лжецы. Некоторые из них произнесли фразу: «За столом лжецов больше, чем рыцарей». Какое наибольшее число людей могли произнести такую фразу?



10. В каждой клетке квадрата 5×5 живет рыцарь или лжец. В 16 клетках у края квадрата живут рыцари, в остальных — лжецы. Каждого спросили, сколько лжецов среди его соседей (живущих в соседней по стороне клетке). Какое наибольшее число ответов «один» могли получить?

Р	Р	Р	Р	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Р	Р	Р	Р

11. За столом сидят 10 человек — рыцари и лжецы. Некоторые из них произнесли фразу: «Среди остальных лжецов больше, чем рыцарей». Какое наибольшее число людей могли произнести такую фразу?
12. В гости к рыцарям и лжецам пришли хитрецы, которые могут утверждать что угодно. Все 100 человек сели за круглый стол. Каждый из сидящих произнес две фразы: «Мой сосед слева — лжец» и «Мой сосед справа — хитрец». Какое наименьшее количество хитрецов за столом?
13. В турнире по настольному теннису принимали участие 128 человек — рыцарей и лжецов. Он был организован по олимпийской системе: в каждом туре участники разбиваются на пары, проигравший выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После турнира каждый из игроков заявил, что обыграл не более одного рыцаря. Сколько рыцарей могло участвовать в турнире?
14. На часах (со стрелкой) в каждом из 12 часовых делений живет рыцарь или лжец. Каждого из них попросили назвать номер ближайшего (по направлению движения часовой стрелки) к нему лжеца. Ответы (начиная с живущего в номере 1 и далее по часовой стрелке) даны следующие: 3, 3, 6, 6, 6, 7, 9, 10, 11, 11, 12, 6. Сколько лжецов живет в часах?
15. На острове рыцарей и лжецов проводился референдум с вопросом «Мы где?». В нём приняли участие 240 человек. Предлагались два варианта ответа: «да» или «нет». На выходе с участков каждого спросили, что он ответил. Оказалось, что людей, сказавших, что они ответили «да» вдвое больше, чем тех, кто на самом деле ответил «да», а людей, сказавших, что они ответили «нет» вдвое меньше, чем тех, кто действительно ответил «нет». Сколько людей ответили «нет» на вопрос референдума?





Блок 12. Логика

Интернет-карусель (2021–2022)

Условия, ответы, решения и указания

Действие задачи происходит на острове рыцарей и лжецов. Здесь живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

1. В комнате собрались 10 человек — рыцарей и лжецов. Каждый заявил каждому из остальных одну из фраз «Ты — рыцарь» или «Ты — лжец». Первая из этих фраз произнесена 42 раза. Сколько рыцарей среди собравшихся?

Ответ: 4 или 6.

Указание: в комнате 4 лжеца и 6 рыцарей или наоборот.

Решение. Всего произнесено $10 \cdot 9 = 90$ фраз. Фраза «Ты — лжец» была произнесена $90 - 42 = 48$ раз. Ее мог сказать рыцарь лжецу или лжец рыцарю, то есть в каждой паре «лжец-рыцарь» она была произнесена два раза. Значит, всего пар «рыцарь-лжец» ровно 24, и это равно произведению числа рыцарей на число лжецов. Разложим число 24 на два множителя всеми возможными способами: $24 = 24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$. Только в последнем разложении сумма множителей равна 10 — общему количеству человек. Значит, рыцарей было 4 или 6.

2. В группе из 10 человек (рыцарей и лжецов) все разбились на пары. В каждой паре они смогли сказать друг другу фразу «Ты — лжец!». Затем они иначе разбились на пары. В скольких парах могут сказать друг другу «Ты — рыцарь!»?

Ответ: 0, 2 или 4.

Решение. Если в паре друг другу сказали фразу «Ты — лжец!», то ней рыцарь и лжец. Из первого разбиения следует, что здесь 5 рыцарей и 5 лжецов.

Сказать друг другу «Ты — рыцарь!» могут только в парах из 2 рыцарей или 2 лжеца. Если второй раз разбились на пары «рыцарь-лжец», то фразу «Ты — рыцарь!» никто не произнесет. Если второй раз была только одна пара из двух рыцарей, то будет ровно одна пара из двух лжецов; если ровно 2 пары из рыцарей, то ровно 2 пары из лжецов. В этих случаях фразу «Ты — рыцарь!» скажут в 2 или 4 парах.

3. Для статистического эксперимента пригласили рыцарей и лжецов. Каждому задали вопрос: «Среди вас рыцарей больше половины?» Ровно половина тестируемых ответила на этот вопрос «да». Кого на самом деле среди них больше?

Ответ: лжецов и рыцарей поровну.



Решение. Все рыцари ответили на этот вопрос одинаково. Все лжецы тоже ответили одинаково, но не так, как рыцари. Из условия следует, что половина ответов — «да», половина — «нет», значит, рыцарей и лжецов поровну.

4. За круглым столом сидят 57 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них сказал: «Если я поверну голову направо, то среди первых двоих человек обязательно увижу лжеца». Сколько рыцарей среди них?

Ответ 38.

Указание. В кругу Р и Л расположены так: ...РРЛРРЛ...; $57 : 3 \cdot 2 = 38$.

Решение. Каждый рыцарь видит лжеца справа, значит, за столом есть лжецы. Рассмотрим одного из них. Среди двух человек справа от него не может быть ни одного лжеца, значит, они оба рыцари. Посмотрим на первого соседа. Среди двух его соседей справа есть лжец, но его сосед справа — рыцарь, значит, за этим рыцарем сидит лжец. Значит, справа сидят два рыцаря, потом снова лжец и так далее. Всего получится $57 : 3 = 19$ троек «ЛРР». В каждой тройке два рыцаря, значит, рыцарей $19 \cdot 2 = 38$.

5. Учительница написала на доске натуральное число. Каждый из 10 учеников — рыцарь или лжец — сказал фразу про это число: «Это число не более 5», «Это число не более 4», ..., «Это число не более 1», «Это число более 5», «Это число более 4», ..., «Это число более 1». Сколько среди этих 10 учеников лжецов?

Ответ: 5.

Указание: фразы разбираются на пары противоположных, поэтому ученики разбираются на пары «рыцарь-лжец».

Решение. Утверждения «это число не более 5» и «это число более 5» противоположны: что бы ни сказал учитель, из них прав ровно один, то есть их произнесли рыцарь и лжец.

Аналогично про 4 пары «это число не более 4» и «это число более 4», ..., «это число не более 1» и «это число более 1».

Вывод: 10 человек разбираются на пары, в каждой рыцарь и лжец. Значит, рыцарей ровно пять.

6. За круглым столом собралось 100 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них заявил: «Мои соседи — рыцарь и лжец». При этом 15 рыцарей ошиблись: их считают рыцарями, но они сказали неправду. Сколько могло быть лжецов?

Ответ: 29, 31, 33, 35 или 37.

Решение. Что бы происходило, если рыцари имеются, а никто из них не ошибся? Около рыцаря стоят лжец и рыцарь: «ЛРР». Для крайних в этой тройке получаем однозначно соседей: «РЛРРЛ». Продолжая далее, имеем «...РРЛРРЛРРЛ...». Все за столом разбираются на тройки «РРЛ», общее число сидящих кратно трём.



Если Ф — это рыцарь, сказавшие неправду. Он может стоять только между двумя лжецами или двумя рыцарями (возможно, какой-то его сосед-рыцарь тоже ошибся).

В первой ситуации можно добавить рыцаря: «ЛФЛ» → «ЛРРЛ», во второй — убрать Ф: «РФР» → «РР». После каждой замены каждый за столом может сказать указанную в условии фразу.

После 15 замен ошибающихся рыцарей не останется, количество лжецов не изменится. Количество человек, сидящих за столом, должно стать кратно трём.

При каждой замене добавляется или удаляется рыцарь. Поэтому всего может стать $100 + 15 = 115$, $100 + 14 - 1 = 113$, $100 + 13 - 2 = 111$, ..., $100 - 14 + 1 = 87$, $100 - 15 = 85$ человек. Из них кратны трём только числа 111, 105, 99, 93, 87. Лжецы — треть от количества, их 29, 31, 33, 35 или 37 человек.

7. В группе из 13 человек (рыцарей и лжецов) каждый заявил про себя «Я — рыцарь!» или «Я — лжец!». Сколько было заявлений «Я — рыцарь!»?

Ответ: 13.

Решение. Фразу «Я — лжец!» не мог произнести ни лжец, ни рыцарь. Поэтому все 13 присутствующих произнесли фразу «Я — рыцарь!».

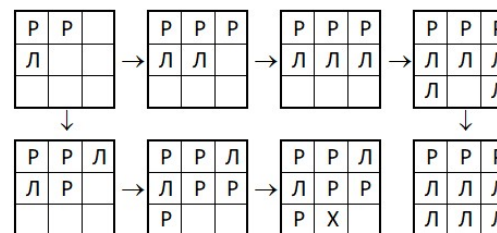
8. В каждой клетке квадрата 3×3 живет рыцарь или лжец. Каждого спросили, сколько лжецов среди его соседей (живущих в соседней по стороне клетке). Все ответили «один». А сколько всего может быть лжецов?

Ответ: 6 или 9.

Решение. Рассмотрим два случая.

(1) Пусть во всех угловых клетках живут лжецы. Тогда в остальных клетках у сторон квадрата живут лжецы, так как у них уже есть два соседа-лжеца. В центральной клетке живёт лжец, так как у него все четверо соседней — лжецы. Всего 9 лжецов.

(2) Пусть в какой-то угловой клетке живет рыцарь. Тогда его соседи — рыцарь и лжец. На рисунке показано, как однозначно заполняются клетки в 2 случаях. В одном из них в клетке с крестиком должен стоять и рыцарь, и лжец, поэтому он невозможен. Другой случай приводит к расстановке с 6 лжецами.



9. За столом сидят 10 человек — рыцари и лжецы. Некоторые из них произнесли фразу: «За столом лжецов больше, чем рыцарей». Какое наибольшее число людей могли произнести такую фразу?

Ответ: 5.

Решение. Если такую фразу произнесли либо только рыцари, либо только лжецы. Если её произнесли рыцари, то рыцарей не более 4 и фразу произнесли не более 4 раз. Если её произнесли лжецы, то лжецов не более 5 и фразу произнесли не более 5 раз. Вывод: сказать такую фразу могли максимум 5 человек, и в этом случае все они лжецы.

10. В каждой клетке квадрата 5×5 живет рыцарь или лжец. В 16 клетках у края квадрата живут рыцари, в остальных — лжецы. Каждого спросили, сколько лжецов среди его соседей (живущих в соседней по стороне клетке). Какое наибольшее число ответов «один» могли получить?

Р	Р	Р	Р	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Л	Л	Л	Р
Р	Р	Р	Р	Р

Ответ: 21.

Решение. Каждый лжец может ответить «один» — это будет ложью. Из рыцарей это будет ложью только для жители угловых клеток. Поэтому, ответ «один» не могут дать только четверо. Остальные $25 - 4 = 21$ житель — могут.

11. За столом сидят 10 человек — рыцари и лжецы. Некоторые из них произнесли фразу: «Среди остальных лжецов больше, чем рыцарей». Какое наибольшее число людей могли произнести такую фразу?

Ответ: 10.

Решение. Если за столом поровну рыцарей и лжецов, то такую фразу может произнести каждый.

12. В гости к рыцарям и лжецам пришли хитрецы, которые могут утверждать что угодно. Все 100 человек сели за круглый стол. Каждый из сидящих произнес две фразы: «Мой сосед слева — лжец» и «Мой сосед справа — хитрец». Какое наименьшее количество хитрецов за столом?

Ответ: 34.

Указание. Подряд могут сидеть не более двух жителей, не являющихся хитрецами.

Решение. Среди любых трёх сидящих подряд должен быть хотя бы один хитрец. Действительно, если это так, то рыцарь может быть только крайним справа. Но в вариантах «ЛЛЛ» и «ЛЛР» лжец по центру говорит правду, что невозможно.

Хотя бы один хитрец имеется. Выделим его, а остальных 99 человек разобьем на 33 тройки рядом сидящих. В каждой тройке есть хотя бы один хитрец. Значит, всего не менее $1 + 33 = 34$ хитрецов.

С другой стороны, может быть ровно 34 хитреца: посадим за стол одного хитреца, а за ним 33 раза тройки «ЛРХ».

13. В турнире по настольному теннису принимали участие 128 человек — рыцарей и лжецов. Он был организован по олимпийской системе: в каждом туре участники разбиваются на пары, проигравший выбывает из турнира (ничьих в теннисе не бывает). После турнира каждый из игроков заявил, что обыграл не более одного рыцаря. Сколько рыцарей могло участвовать в турнире?

Ответ: 96.

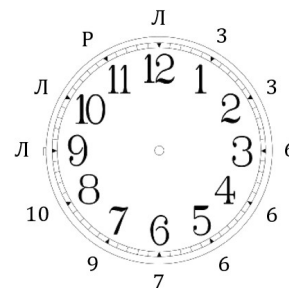
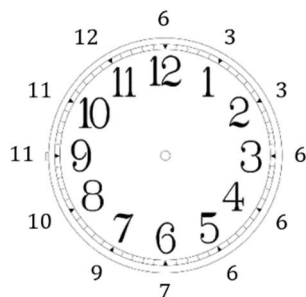
Решение. Все, проигравшие в первом туре, сказали правду — это $128 : 2 = 64$ рыцаря. Все, проигравшие во втором туре, также сказали правду — это $64 : 2 = 32$ рыцаря. Выигравшие во втором туре обыграли уже двух рыцарей, поэтому они солгали. Значит, в турнире приняло участие $64 + 32 = 96$ рыцарей.

14. На часах (со стрелкой) в каждом из 12 часовых делений живет рыцарь или лжец. Каждого из них попросили назвать номер ближайшего (по направлению движения часовой стрелки) к нему лжеца. Ответы (начиная с живущего в номере 1 и далее по часовой стрелке) даны следующие: 3, 3, 6, 6, 6, 7, 9, 10, 11, 11, 12, 6. Сколько лжецов живет в часах?

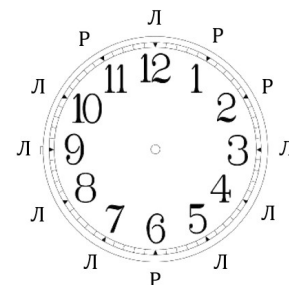
Ответ: 8

Решение. Если на отметке «12» находится рыцарь, то ближайший к нему по часовой стрелке лжец — на отметке «6». Тогда на отметках «1», «2», «3», «4», «5» — рыцари, что невозможно (например, рыцарь на отметке «1» говорит неправду).

Значит, на «12» — лжец, откуда на «11» говорят правду, а на «9» и «10» лгут. Результат показан на рисунке.



Далее несложно всех восстановить, двигаясь против часовой стрелки: на «8» — лжец, на «9» — лжец, на «6» — рыцарь (он говорит правду про «7»), на «5», «4» и «3» — лжецы, на «2» и «1» — рыцари.



Всего 8 лжецов.

15. На острове рыцарей и лжецов проводился референдум с вопросом «Мы где?». В нём приняли участие 240 человек. Предлагались два варианта ответа: «да» или «нет». На выходе с участков каждого спросили, что он ответил. Оказалось, что людей, сказавших, что они ответили «да» вдвое больше, чем тех, кто на самом деле ответил «да», а людей, сказавших, что они ответили «нет» вдвое меньше, чем тех, кто действительно ответил «нет». Сколько людей ответили «нет» на вопрос референдума?

Ответ: 160.

Решение. Пусть на референдуме $2x$ человек ответили «да» и $240 - 2x$ человек ответили «нет». Тогда $4x$ человек на выходе сказали «да», а $120 - x$ человек — «нет».

На референдуме и на выходе из него участвовали одни и те же, то выполнено $4x + (120 - x) = 240$, откуда $x = 40$.

На вопрос референдума ответили «нет» $240 - 2x = 240 - 80 = 160$ человек.