Блок 4. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2022–2023)

Задания

1. **Среднее значение**. На доске выписаны по одному разу подряд все чётные числа, начиная с 214 и заканчивая 388. Чему равно среднее этого набора чисел?

2. **Размах набора**. Дан набор из нескольких натуральных чисел. Его размах равен 2023. Затем некоторые из чисел увеличили на 1, остальные уменьшили на 1. Чему может быть равен размах полученного набора чисел?

3. **Медиана набора**. Константин записал в тетрадке одно число 1, два числа 2, три числа 3, …, сто чисел 100. Чему равна медиана этого набора чисел?

4. **Среднее значение**. Даны 5 карточек с 5 различными цифрами, отличных от «0». Из них составили все возможные пятизначные числа, в каждом числе все цифры разные. Среднее арифметическое всех составленных чисел равно 39999,6. Найдите среднее арифметическое пяти исходных цифр.

5. **Среднее значение**. Возраст Ивана Васильевича — 44 года. Он в составе своей команды из 4 человек играет в игру «Кто сможет быстро ответить на все вопросы?». Он перешёл из этой команды в другую команду, в которой было тоже 4 человека. С прежней осталось трое человек, в новой стало 5 участников. После его перехода средний возраст каждой из этих двух команд увеличился на 1 год. Чему равен средний возраст игроков двух этих команд?

6. **Таблицы**. Три седьмых класса написали контрольную работу по курсу «Статистика». Результаты контрольной — количество оценок в каждом классе, внесли в таблицу. В каждой строке, соответствующей классу, подсчитали средний балл. В каком из классов средний балл самый высокий?

	"3"	"4"	"5"
7А	5	13	7
7Б	6	14	8
7В	3	21	5

7. **Среднее значение**. Какие из данных утверждений являются верными?

   (1) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней двойки может быть натуральная степень двойки.

   (2) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней двойки может быть натуральная степень тройки.

   (3) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней тройки может быть натуральная степень тройки.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

8. **Медиана набора**. У четвертых степеней всех натуральных чисел от 1 до 100 нашли остатки от деления на 5 и выписали полученные 100 чисел. Чему равна медиана выписанных чисел?

9. **Средняя скорость**. По дороге, на которой через равные промежутки расположены четыре столба, едет велосипедист с непостоянной скоростью. Его средняя скорость на участке от первого столба до третьего составила 12 км/ч, от второго до четвертого — 14 км/ч, а от второго до третьего — 9 км/ч. Сколько км/ч составляет среднюю скорость велосипедиста на всем пути от первого до четвертого столба?

10. Встретились 57 аборигенов. Они по очереди сказали фразу: «Среди заявлений, сделанных ранее, ложных ровно на 12 больше, чем истинных». Сколько лжецов было среди них?

11. **Медиана набора**. Дан набор из 57 различных натуральных чисел. Его медиана равна 2023. Затем некоторые из чисел увеличили на 2, остальные уменьшили на 2. Чему может быть равна медиана полученного набора чисел?

12. **Размах набора**. Размах набора из 5 различных натуральных чисел равен 5. Его медиана равна 2023. Чему может быть равна сумма чисел набора?

13. В наборе из N чисел количество чисел «48» составляет меньше 50 %, но больше 40 % от общего количества. При каком наименьшем N такое возможно?

14. Даны два числа 1 и 3. Какое третье натуральное число надо добавить к ним третье число так, чтобы их среднее гармоническое было натуральным числом?

15. В турнире каждая команда сыграла с каждой из остальных ровно 1 раз. Всего прошло не менее 235, но не более 275 игр. Сколько было команд?

Блок 4. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2022–2023)

Ответы, указания, решения

1. **Среднее значение**. На доске выписаны по одному разу подряд все чётные числа, начиная с 214 и заканчивая 388. Чему равно среднее этого набора чисел?

   Ответ: 301.

   Решение. От 214 до 388 всего (388 – 214) : 2 + 1 = 88 чётных чисел. Их сумма равна (214 + 388) + (216 + 286) + … + (300 + 302) = 602 · 44. Среднее значение равно (602 · 44) : 88 = 301.

   Комментарий. Также можно заметить, что если всего 88 чисел, то среднее значение — это число, расположенное между 44-м и 45-м числами, то есть между 214 + 43 · 2 = 214 + 86 = 300 и 302. Это число 301.

2. **Размах набора**. Дан набор из нескольких натуральных чисел. Его размах равен 2023. Затем некоторые из чисел увеличили на 1, остальные уменьшили на 1. Чему может быть равен размах полученного набора чисел?

   Ответ: 2021, 2022, 2023, 2024, 2025.

   Решение. Наибольшее число изменяется не более чем на 1 и наименьшее —не более чем на 1. Значит, размах может измениться не более чем на 2, то есть возможные значения от 2023 – 2 = 2021 до 2023 + 2 = 2025. Все 5 этих значений возможны. Приведём примеры:
   {10; 100; 2033} → {11; 99; 2032} — размах стал 2021;
   {10; 100; 2032; 2033} → {11; 99; 2033; 2032} — размах стал 2033 – 11 = 2022;
   {10; 100; 2033} → {11; 99; 2034} — размах стал 2023;
   {10; 11; 100; 2033} → {11; 10; 99; 2034} — размах стал 2034 – 10 = 2024;
   {10; 100; 2033} → {9; 99; 2034} — размах стал 2025.

3. **Медиана набора**. Константин записал в тетрадке одно число 1, два числа 2, три числа 3, …, сто чисел 100. Чему равна медиана этого набора чисел?

   Ответ: 71.

   Указание. Всего записано 1 + 2 + 3 + … + 100 = 101 · 50 = 5050 чисел, половина из них — 2525 чисел. Надо подобрать сумму от 1 до N, наиболее близкую к 2525. Ниже в решении N = 70.

   Решение. Заметим, чисел 1, 2, …, 70 выписано 1 + 2 + … + 70 = 71 · 35 = 2485 штук. Это меньше половины всех чисел. Но чисел от 72 до 100 выписано

   72 + 73 + … + 100 = 2494 штук, что тоже меньше половины. Значит, «в середине списка» будут числа 71, то есть медиана набора равна 71.

4. **Среднее значение**. Даны 5 карточек с 5 различными цифрами, отличных от «0». Из них составили все возможные пятизначные числа, в каждом числе все цифры разные. Среднее арифметическое всех составленных чисел равно 39999,6. Найдите среднее арифметическое пяти исходных цифр.

   Ответ: 3,6.

   Решение. Из пяти различных цифр можно составить 5! = 120 чисел. Каждая цифра в каждом разряде участвует 4! = 24 раза, значит, сумма всех чисел в 11111 · 24 раз больше суммы данных пяти цифр Значит, сумма цифра равна (39999,6 · 120) : (11111 · 24) = 18. Среднее равно 18 : 5 = 3,6.

5. **Среднее значение**. Возраст Ивана Васильевича — 44 года. Он в составе своей команды из 4 человек играет в игру «Кто сможет быстро ответить на все вопросы?». Он перешёл из этой команды в другую команду, в которой было тоже 4 человека. С прежней осталось трое человек, в новой стало 5 участников. После его перехода средний возраст каждой из этих двух команд увеличился на 1 год. Чему равен средний возраст игроков двух этих команд?

   Ответ: 43.

   Решение. Пусть в первой команде суммарный возраст остальных трёх игроков равен a, суммарный возраст четырёх игроков новой команды равен b. Из условия следуют два соотношения: $a/3 - 1 = (a + 44)/4$ и $b/4 + 1 = (b + 44)/5$. Из них получаем $a = 44 \cdot 3 + 12$, $b = 44 \cdot 4 - 20$. Средний возраст всех 8 человек равен $(a + b + 44)/8 = (44 \cdot 8 - 8)/8 = 44 + 4 = 43$ года.

6. **Таблицы**. Три седьмых класса написали контрольную работу по курсу «Статистика». Результаты контрольной — количество оценок в каждом классе, внесли в таблицу.

	"3"	"4"	"5"
7А	5	13	7
7Б	6	14	8
7В	3	21	5

   В каждой строке, соответствующей классу, подсчитали средний балл. В каком из классов средний балл самый высокий?

   Ответ: 1.

   Решение. Ниже в таблице посчитано общее число учеников в каждом классе, суммарный балл и среднее, округленное до 2 цифр после запятой.

	"3"	"4"	"5"	Всего	Сумм. балл	Среднее
7А	5	13	7	25	102	4,080
7Б	6	14	8	28	114	4,071
7В	3	21	5	29	118	4,069

7. **Среднее значение**. Какие из данных утверждений являются верными?

(1) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней двойки может быть натуральная степень двойки.

(2) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней двойки может быть натуральная степень тройки.

(3) Средним арифметическим нескольких (более одной) различных натуральных степеней тройки может быть натуральная степень тройки.

Ответ: 2.

Решение. Рассмотрим каждый из пунктов.

(1) Пусть такое возможно: сумма k степеней числа 2, меньшая из которых 2^m, равна $k \cdot 2^n$. Тогда, очевидно, $n > k$. Максимальная степень числа 2, на которую делится сумма, равна k, а при этом $k \cdot 2^n$ делится на большую степень числа 2. Противоречие.

(2) Есть пример: (2 + 16) : 2 = 9.

(3) Аналогично пункту (1), вместо степеней числа 2 можно рассмотреть степени числа 3.

8. **Медиана набора**. У четвертых степеней всех натуральных чисел от 1 до 100 нашли остатки от деления на 5 и выписали полученные 100 чисел. Чему равна медиана выписанных чисел?

Ответ: 1.

Решение. Если два числа отличаются на 5, то их четвертные степени дают одинаковые остатки. Действительно, из тождества $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$ следует, что если разность чисел кратна 5, то разность из четвёртых степеней также кратна 5.

Четвёртые степени чисел 1, 2, 3, 4, 5 дают соответственно остатки 1, 1, 1, 1, 0. Тогда числа следующей пятерки дают тот же набор остатков, и так далее. Поэтому, среди остатков четвертых степеней чисел от 1 до 100 будет пятая часть — нули, остальные — единицы. В описанном наборе 20 нулей и 80 единиц. Медиана такого набора равна 1.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

9. **Средняя скорость**. По дороге, на которой через равные промежутки расположены четыре столба, едет велосипедист с непостоянной скоростью. Его средняя скорость на участке от первого столба до третьего составила 12 км/ч, от второго до четвертого — 14 км/ч, а от второго до третьего — 9 км/ч. Сколько км/ч составляет среднюю скорость велосипедиста на всем пути от первого до четвертого столба?

Ответ: 15,12.

Решение. Пусть a км — расстояние между соседними столбами. Из условия задачи $2a/12 = a/6$ ч. — время, которое проезжает велосипедист от первого столба до третьего, $2a/14 = a/7$ ч. — от второго столба до четвертого, $a/9$ ч. — от второго столба до третьего. На весь путь велосипедист потратил $a/6 + a/7 - a/9 = 25a/126$ часов. Длина всего пути равна $3a$ км. Средняя скорость на всём пути равна $3a : (25a/126) = 15{,}12$.

10. Встретились 57 аборигенов. Они по очереди сказали фразу: «Среди заявлений, сделанных ранее, ложных ровно на 12 больше, чем истинных». Сколько лжецов было среди них?

Ответ: 34.

Решение. Первые 12 аборигенов солгут, так как у каждого ранее сделано менее 12 утверждений. Далее 13-й скажет правду, 14-й — солжёт, 15-й будет прав и так далее. Последовательность такова: ЛЛ...ЛЛРЛРЛРЛ... — сначала 12 лжецов, а потом чередование рыцарей и лжецов. После 11 лжецов 46 человек, среди которых чередуются Р и Л — всего 46 : 2 + 11 = 34 лжеца.

11. **Медиана набора**. Дан набор из 57 различных натуральных чисел. Его медиана равна 2023. Затем некоторые из чисел увеличили на 2, остальные уменьшили на 2. Чему может быть равна медиана полученного набора чисел?

Ответ: 2021, 2022, 2023, 2024, 2025.

Решение. Если все числа увеличились на 2, то медиана станет 2023 + 2 = 2025; если все уменьшились на 2 — станет 2023 – 2 = 2021.

Приведём примеры, когда медиана стала 2022, 2023 или 2024:
(2021; 2022; 2023; 2024; 2025) → (2019; 2020; 2025; 2022; 2027) — медиана 2022;
(2021; 2022; 2023; 2024; 2025) → (2019; 2024; 2025; 2022; 2023) — медиана 2023;
(2021; 2022; 2023; 2024; 2025) → (2019; 2024; 2021; 2026; 2027) — медиана 2024.

Предположим, медиана стала не менее 2026. Значит, должно получиться хотя бы 3 числа, которые не менее 2026. До изменений эти числа были не менее 2026 – 2 = 2024. Но таких чисел не более двух (иначе медиана было бы больше 2023). Противоречие.

Аналогично можно показать, что медиана не может стать менее 2021.

12. Размах набора из 5 различных натуральных чисел равен 5. Его медиана равна 2023. Чему может быть равна сумма чисел набора?

Ответ: 10113, 10114, 10116, 10117.

Решение. Так как в наборе числа различные, а медиана равна 2023, то наибольшее число не менее 2023 + 2 = 2025, наименьшее — не более 2023 – 2 = 2021. Так как размах 5, то либо наименьшее и наибольшее равны 2020 и 2023, либо 2021 и 2026. То есть, описанный набор — это числа от 2020 до 2026, из которого выкинули 2 числа: выкинуто либо 2020, либо 2026, одно выкинутое меньше 2023, другое — больше 2023.

Выпишем эти варианты и найдем суммы:
без 2022 и 2026 набор (2020; 2021; 2023; 2024; 2025) — сумма 10113;
без 2021 и 2026 набор (2020; 2022; 2023; 2024; 2025) — сумма 10114;
без 2020 и 2025 набор (2021; 2022; 2023; 2024; 2026) — сумма 10116;
без 2020 и 2024 набор (2021; 2022; 2023; 2025; 2026) — сумма 10117.

13. В наборе из N чисел количество чисел «48» составляет меньше 50 %, но больше 40 % от общего количества. При каком наименьшем N такое возможно?

Ответ: 7.

Решение. Если всего 7 чисел, а нужных — 3 из них, то они составляют $3/7 \approx 0{,}43$ от общего количества, что более 40 %, но менее 50 %. Это количество наименьшее, так как для меньшего количества такое невозможно. Достаточно проверить, что при 3, 4, 5, 6 числах количество менее половины составляет менее 40 %. Действительно, 2 числа из 6, 2 числа из 5, 1 число из 4 и 1 число из 3 составляют менее 40 % от общего количества.

14. Даны два числа 1 и 3. Какое третье натуральное число надо добавить к ним третье число так, чтобы их среднее гармоническое было натуральным числом?

Ответ: 6.

Указание. Средним гармоническим трёх чисел является величина

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+bc+ca}.$$

Решение 1. Найдём натуральное число n, при котором $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot n = 9n$ кратно числу $1 \cdot 3 + 1 \cdot n + 3 \cdot n = 4n + 3$. При этом значении $9n - 2(4n + 3) = n - 6$ также кратно $4n + 3$, что возможно только при $n - 6 = 0$ (так как $n - 6 < 4n + 3$ при всех натуральных n). Значит, $n = 6$.

Решение 2. Пусть n — искомое число. Тогда $1/1 + 1/3 + 1/n$ должно быть равным $3/k$, где k — некоторое натуральное.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

Так как $1 < 1/1 + 1/3 + 1/n < 3$, то единственное значение k — это $k = 2$. При этом $1/n = 3/2 - (1/1 + 1/3) = 1/6, n = 6$.

15. В турнире каждая команда сыграла с каждой из остальных ровно 1 раз. Всего прошло не менее 235, но не более 275 игр. Сколько было команд?

Ответ: 23.

Решение. Если играли n команд, то количество игр равно $n(n-1)/2$. Если бы команд было не более 22, то прошли не более $21 \cdot 22 : 2 = 231$ игр, что меньше данного. Если бы команд было не менее 24, то прошли не более $24 \cdot 23 : 2 = 276$ игр, что больше данного. Значит, единственное возможное значение — 23 команды. Оно подходит: $23 \cdot 22 : 2 = 253$, $235 < 253 < 275$.