

Блок 4. Вероятность и статистика

Подготовительное занятие

Задания

- **Среднее значение.** Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.

В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Зарплата остальных осталась без изменений. Сколько *рублей* составила в мае средняя зарплата в магазине?

- **Медиана.** Медианой набора чисел называется такое число, которое разделяет набор (записанный по возрастанию) на две равные части. Вместо «медиана» можно сказать «середина».

Алгоритм нахождения медианы:

- (1) упорядочить числовой набор по возрастанию;
- (2) одновременно зачеркнуть самое большое и самое маленькое числа этого набора до тех пор, пока не останется одно или два числа;
- (3) если осталось одно число, то оно и есть медиана; если остались два числа, то медианой будет среднее арифметическое этих чисел.

Например, медианой набора выборки {11, 9, 3, 5, 5} является число 5, медианой выборки {3, 4, 5, 6, 7, 2020} является число 5,5.

В ряд выписаны различные числа в порядке возрастания. Известно, что 15-ое число равно 17, оно является и медианой, и средним арифметическим всех чисел. Чему равна сумма выписанных чисел?

- **Мода.** Мода — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Иногда в совокупности встречается более чем одна мода. Например, мода набора {6; 2; 6; 6; 8; 9; 9; 9; 0} — числа 6 и 9.

Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 4,6. Какова мода его набора оценок?

- **Размах.** Размах набора чисел — разность между наибольшим и наименьшим из чисел. Например, размах набора {−1; 2; −3; 4} равен $4 - (-3) = 7$, размах набора {1; 1; 2; 2; 3; 3} равен $3 - 1 = 2$.

Выписали квадраты 20 последовательных целых чисел. Какой наименьший *размах* может быть у этого набора чисел?

1. Герман выполнял домашнее задание по статистике. Ему был дан числовой набор {5; −2; −3; 4; −1; 0; −1; 1; 6}. Он нашёл 4 числа: среднее арифметическое этого набора, его медиану, размах и моду. Чему равна сумма этих 4 чисел?
2. В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Одного сотрудника уволили, а зарплата остальных осталась без изменений. После этого средняя зарплата в магазине не изменилась. Сколько *рублей* составляла зарплата уволенного сотрудника?
3. В ряд написано 2020 чисел. Если из этого ряда выкинуть одно из чисел, то медианой будет число 1234, а если выкинуть другое число, то медианой будет 1254. Чему равна медиана изначального ряда?
4. Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 3,6. Какова мода его набора оценок?
5. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое (а) наименьшее, (б) наибольшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?
6. В ряд написано 33 числа. Среди них есть такое, что если его выкинуть, то медианой будет число 29. Также есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 31. И еще есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 39. А чему равна медиана изначального ряда?

Указания, ответы и решения

Содержание заданий ориентировано на курс «Вероятность и статистика» для 7 класса проекта «Математическая вертикаль», реализуемого в г. Москве.

Подготовительное занятие скомпоновано из заданий интернет-карусели 2019–2020 учебного года.

В заданиях сформулированы определения всех специальных понятий. Есть как упражнения на понимание определений, так и задачи, где надо учитывать разные понятия. Соревнование, в том числе, нацелено на изучение такого материала.

Предлагается разобрать с учениками определения и задачи «с точками», задания с номерами дать для самостоятельного решения.

- **Среднее значение.** Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.

В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Зарплата остальных осталась без изменений. Сколько рублей составила в мае средняя зарплата в магазине?

Ответ: 78430.

Решение. Суммарная зарплата в апреле равна $78,6 \cdot 20 = 1572$ тыс. рублей. В мае она стала равной $1572 - 5,7 + 2,3 = 78,43$ тыс. рублей или 78 430 рублей.

- **Медиана.** Медианой набора чисел называется такое число, которое разделяет набор (записанный по возрастанию) на две равные части. Вместо «медиана» можно сказать «середина».

Алгоритм нахождения медианы:

- (1) упорядочить числовой набор по возрастанию;
- (2) одновременно зачеркнуть самое большое и самое маленькое числа этого набора до тех пор, пока не останется одно или два числа;
- (3) если осталось одно число, то оно и есть медиана; если остались два числа, то медианой будет среднее арифметическое этих чисел.

Например, медианой набора выборки {11, 9, 3, 5, 5} является число 5, медианой выборки {3, 4, 5, 6, 7, 2020} является число 5,5.

В ряд выписаны различные числа в порядке возрастания. Известно, что 15-ое число равно 17, оно является и медианой, и средним арифметическим всех чисел. Чему равна сумма выписанных чисел?

Ответ: 493.

Решение. Если 15-е число — медиана, то до него в ряду 14 чисел и после него 14 чисел, то есть всего $14 + 14 + 1 = 29$ чисел. Среднее арифметическое равно 17, поэтому сумма равна $29 \cdot 17 = 493$.

- **Мода.** Мода — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Иногда в совокупности встречается более чем одна мода. Например, мода набора {6; 2; 6; 6; 8; 9; 9; 9; 0} — числа 6 и 9.

Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 4,6. Какова мода его набора оценок?

Ответ: 5.

Решение. Средний балл 4,6, поэтому сумма всех 10 оценок $10 \cdot 4,6 = 46$.

Если «5» — не мода, то получено не более 5 пятерок, а общая сумма оценок не более $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 45$, что меньше 46. Значит, мода — «5».

- **Размах.** Размах набора чисел — разность между наибольшим и наименьшим из чисел. Например, размах набора {−1; 2; −3; 4} равен $4 - (-3) = 7$, размах набора {1; 1; 2; 2; 3; 3} равен $3 - 1 = 2$.

Выписали квадраты 20 последовательных целых чисел. Какой наименьший размах может быть у этого набора чисел?

Ответ: 100.

Указание. Интуитивно понятно, что размах минимальный, если выписаны квадраты чисел от −9 до 10 или от −10 до 9. Как обосновать, что иначе размах больше, показано в решении.

Решение. Если выписаны квадраты чисел от −9 до 10 (или от −10 до 9), то наименьшее число равно 0, наибольшее — $10^2 = 100$. Размах равен $100 - 0 = 100$.

Покажем, что размах всегда не менее 100, то есть в наборе найдутся 2 числа, отличающихся не менее чем на 100.

Среди данных чисел не менее 19 не равны 0. Тогда по крайней мере 10 из них имеют один знак (все положительны или все отрицательны). Поэтому найдутся два числа a^2 и b^2 , что $a - b \geq 10$. Так как они последовательные и одного знака, то $|a + b| \geq 10$. Тогда $|a^2 - b^2| = |a - b| \cdot |a + b| \geq 10 \cdot 10 = 100$.

1. Герман выполнял домашнее задание по статистике. Ему был дан числовой набор {5; −2; −3; 4; −1; 0; −1; 1; 6}. Он нашёл 4 числа: среднее арифметическое этого набора, его медиану, размах и моду. Чему равна сумма этих 4 чисел?

Ответ: 9.

Указание. Выпишем 10 чисел по возрастанию: $\{-3; -2; -1; -1; 0; 1; 4; 5; 6\}$. Сумма равна 9, среднее арифметическое — 1. Медиана равна 0. Размах — 9. Мода равна -1 . Искомая сумма $1 + 0 + 9 + (-1) = 9$.

2. В магазине 20 сотрудников. Их средняя зарплата в апреле была равна 78,6 тысяч рублей. В мае самый высокооплачиваемый сотрудник получил на 5,7 тысяч меньше, а самый низкооплачиваемый — на 2,3 тысячи больше. Одного сотрудника уволили, а зарплата остальных осталась без изменений. После этого средняя зарплата в магазине не изменилась. Сколько *рублей* составляла зарплата уволенного сотрудника?

Ответ: 75200.

Решение. Суммарная зарплата в апреле равна $20 \cdot 78600$, в мае — $19 \cdot 78600$, она уменьшилась на 78600. При этом на $5700 - 2300 = 3400$ рублей она уменьшилась за счет изменения зарплат, а еще на $78600 - 3400 = 75200$ она уменьшилась на величину зарплаты уволенного сотрудника.

3. В ряд написано 2020 чисел. Если из этого ряда выкинуть одно из чисел, то медианой будет число 1234, а если выкинуть другое число, то медианой будет 1254. Чему равна медиана изначального ряда?

Ответ: 1244.

Решение. Выпишем числа по возрастанию. Так количество чисел ряда чётно, то его медиана — среднее арифметическое 1010-ого и 1011-ого чисел. Если выкинуть одно число, то медианой будет 1010-е или 1011-е число.

Значит, указанные числа ряда равны 1234 и 1254, а медиана всего ряда равна $(1234 + 1254) : 2 = 1244$.

4. Петя на уроках статистики за четверть получил 10 оценок, среди которых только «3», «4» и «5». Его средний балл равен 3,6. Какова мода его набора оценок?

Ответ: 3 или 4.

Решение. Средний балл 3,6, поэтому сумма всех 10 оценок $10 \cdot 3,6 = 36$.

Если мода — «5» (и может вместе с ней еще какие-то оценки), пятерок не менее четырех. Тогда суммарный балл не менее $4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 38$, то есть более 36.

Мода может быть «3» — подходит набор $\{3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 5\}$.

Мода может быть «4» — подходит набор $\{3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4\}$.

Мода не может состоять из «3» и «4». Действительно, если так, то этих оценок по 4 или по 5 штук, на пятёрки остаётся $36 - 4(3 + 4) = 8$ баллов или $36 - 5(3 + 4) = 1$ балл, что невозможно.

5. Выборка состоит из 7 различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 23, а медиана равна 11. Какое (а) наименьшее, (б) наибольшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

(а) Ответ: 42.

Решение. Сумма всех чисел равна $23 \cdot 7 = 161$. Расположим числа в порядке возрастания. Первые три числа меньше 11, далее идёт число 11, потом три числа больше 11.

Чтобы последнее число было как можно меньше, нужно сделать сумму остальных чисел как можно больше. Сумма первых трёх чисел не более $8 + 9 + 10 = 27$. Сумма последних трёх не менее $161 - 11 - 27 = 123$.

Набор $\{8; 9; 10; 11; 40; 41; 42\}$ удовлетворяет условию. Если последнее число меньше 42, то сумма последних трёх чисел не более $39 + 40 + 41 = 120$, что невозможно. Значит, 42 — наименьшее возможное последнее число набора.

(б) Ответ: 119.

Решение. Среднее арифметическое семи чисел равно 23, поэтому их сумма равна $7 \cdot 23 = 161$. Расположим числа в порядке возрастания. Чтобы последнее число было больше, сумма остальных должна быть как можно меньше.

Сумма первых трех чисел не менее $1 + 2 + 3 = 6$. Четвертое число равно 11 (это медиана). Сумма следующих двух чисел не менее $12 + 13 = 25$. Тогда последнее число не более $161 - 6 - 11 - 25 = 119$.

При этом набор чисел $\{1; 2; 3; 11; 12; 13; 119\}$ удовлетворяет условию.

6. В ряд написано 33 числа. Среди них есть такое, что если его выкинуть, то медианой будет число 29. Также есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 31. И еще есть такое число, что если его выкинуть, то медианой будет число 39. А чему равна медиана изначального ряда?

Ответ: 37.

Решение. Выпишем числа по возрастанию. Если выкинули 1-е, 2-е, ..., 15-е или 16-е число, то медианой станет среднее арифметическое 17-го и 18-го чисел. Если выкинули 17-е число, то медианой станет среднее арифметическое 16-го и 18-го чисел. Если выкинули 18-е, 19-е, ..., 32-е или 33-е... число, то медианой станет среднее арифметическое 16-го и 17-го чисел.

Вывод: если 16-е, 17-е, 18-е числа данного ряда в некотором порядке равны a, b, c , то $a + b = 29 \cdot 2$, $b + c = 31 \cdot 2$, $c + a = 39 \cdot 2$.

Найдём значения a, b, c :

$$a + b + c = ((a + b) + (b + c) + (c + a)) : 2 = (29 \cdot 2 + 31 \cdot 2 + 39 \cdot 2) : 2 = 99;$$



Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

$$a = (a + b + c) - (b + c) = 99 - 31 \cdot 2 = 37,$$

$$b = (a + b + c) - (c + a) = 99 - 39 \cdot 2 = 21,$$

$$c = (a + b + c) - (a + b) = 99 - 29 \cdot 2 = 41.$$

Медиана данного ряда — 17-е число, среднее между a, b, c . Оно равно 37.