Блок 6. Графы и турниры

Интернет-карусель (2022–2023)

Задания

Напоминаем, что *граф* состоит из *вершин*, любые две из которых либо соединены одним *ребром*, либо не соединены. *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер.

1. В графе 7 вершин и 8 ребер. Степени 6 вершин равны 1, 2, 2, 3, 3, 3. Чему равна степень седьмой вершины?
2. В графе одна вершина степени 1, две вершины степени 2, три вершины степени 3, …, 10 вершин степени 10, 11 вершин степени 11. Сколько в нём ребер?
3. В турнир по теннису приняли участие 10 человек. В каждой партии играют двое, ничьих не бывает. Проигравший две партии, выбывает из турнира. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Сколько партий могло быть в таком турнире?
4. Три вершины графа имею степень 4, еще четыре — степень 5. Остальные девять вершин имеют одинаковую степень N. При каком наибольшем N такое возможно?
5. В школе два седьмых класса, в 7 «А» и 7 «Б» класса учится по 7 девочек. Каждая имеет хотя бы одну подружку в параллельном классе. Все девочки 7 «А» класса имеют разное число подруг из 7 «Б» класса. Но все девочки 7 «Б» класса имеют одинаковое количество подруг из 7 «А». Сколько?
6. Петя нарисовал граф, все вершины которого пронумерованы всеми двузначным числами от 10 до 99. Ребром соединены каждые две вершины, у которых разность номеров не равна 7. Вася отметил в графе N вершин и ребра между ними. У него получился полный граф (в нём любые две вершины соединены ребром). При каком наибольшем N такое возможно?
7. В графе N вершин, пять из которых имеют степень 2023. При каком наименьшем N возможно?
8. Прошёл однокруговой футбольный турнир. В нём приняли участие 10 команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Победитель набрал 14 очков, четыре команды набрали по 9 очков, три — по 8 очков, одна команда набрала 3 очка и одна — 2. Сколько ничьих было на турнире?
9. В некоторой стране 24 города. Каждая дорога соединяет 2 города страны. Дороги не пересекаются. Из каждого города выходит не менее 4 дорог. Из любого города можно добраться по дорогам в любой другой город. Чтобы проехать из города А в город Б

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

этой страны надо проехать не менее чем через N других городов. Какое наибольшее значение может иметь N?

10. Вершинами графа являются 6 вершин шестиугольника и еще 3 точки внутри него. Ребра графа — отрезки. Это все стороны шестиугольника и еще несколько непересекающихся отрезков внутри шестиугольника. Ребра разбивают весь шестиугольник на треугольники. Сколько ребер может быть в этом графе?
11. Турнир по игре «Камень, Ножницы, Бумага» проходил по олимпийской системе. В каждой партии играли двое, проигравший выбывал. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Оставшийся объявляется победителем. В турнире приняли участие 5 мальчиков и 5 девочек. Победителем турнира стала девочка. Какое наименьшее количество партий могли выиграть девочки?
12. Турнир по игре «Камень, Ножницы, Бумага» проходил по олимпийской системе. В каждой партии играли двое, проигравший выбывал. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Оставшийся объявляется победителем. В турнире приняли участие 5 мальчиков и 5 девочек. Победителем турнира стала девочка. Какое наибольшее количество партий могло быть между мальчиком и девочкой?
13. В шахматном турнире среди учеников математического класса приняли участие 13 человек. Каждый сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за проигрыш — 0. Евгений проиграл только один раз, но набрал меньше всех очков. Александр занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Евгений мог отстать от Александра?
14. На окружности отмечено 5 точек. Леонид рисует граф: его вершинами являются всевозможные треугольники с вершинами в этих точках, ребром соединяются те вершины, которым соответствуют треугольники, имеющие общую вершину. Сколько ребер в графе, нарисованном Леонидом?
15. На окружности отмечено 6 точек. Леонид рисует граф: его вершинами являются всевозможные треугольники с вершинами в этих точках, ребром соединяются те вершины, которым соответствуют треугольники, имеющие общую вершину. Сколько ребер в графе, нарисованном Леонидом?

Блок 6. Графы и турниры

Интернет-карусель (2022–2023)

Ответы, указания, решения

Напоминаем, что *граф* состоит из *вершин*, любые две из которых либо соединены одним *ребром*, либо не соединены. *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер.

1. В графе 7 вершин и 8 ребер. Степени 6 вершин равны 1, 2, 2, 3, 3, 3. Чему равна степень седьмой вершины?

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть n — искомая степень. Сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер. Значит, $(1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3) + n = 2 \cdot 8$, откуда $14 + n = 16, n = 2$.

2. В графе одна вершина степени 1, две вершины степени 2, три вершины степени 3, …, 10 вершин степени 10, 11 вершин степени 11. Сколько в нём ребер?

   Ответ: 253.

   Решение. Сумма степеней равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 10 \cdot 10 + 11 \cdot 11 = 506$. Сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, поэтому в графе $506 : 2 = 253$ ребра.

3. В турнир по теннису приняли участие 10 человек. В каждой партии играют двое, ничьих не бывает. Проигравший две партии, выбывает из турнира. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Сколько партий могло быть в таком турнире?

   Ответ: 18 или 19.

   Решение. Найдём количество проигрышей — оно равно количеству партий: 9 человек проиграли по 2 раза, а победитель — 0 или 1 раз. Всего 18 или 19 партий.

4. Три вершины графа имею степень 4, еще четыре — степень 5. Остальные девять вершин имеют одинаковую степень N. При каком наибольшем N такое возможно?

   Ответ: 10.

   Решение. Оценка. В графе $3 + 4 + 9 = 16$ вершин. Сколько ребер выходит из 9 вершин степени N? Не более чем по 8 ребер в остальные 8 вершин степени N, в вершины степени 4 и 5 выходит не более чем их сумма степеней, то есть $3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$ ребер. Всего не более $9 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 104$ ребер. Так как $[104 : 9] = 11$, то наибольшая возможная степень равна 11.

   Если $N = 11$, то в графе нечётную степень имеют $4 + 9 = 13$ вершин. Это невозможно, так как в графе сумма степеней всех вершин чётна.

   Значит, максимальная степень не более 10. При $N = 10$ есть пример.

   Сделаем 3 белые вершины, проведем между ними все ребра — их степень станет 2. Сделаем 4 синие вершины, проведем между ними все ребра — их степень станет 3. Из белых вершин надо провести еще $3 \cdot 2$ ребер, из синих — $4 \cdot 2$ ребер, всего 14 ребер. Удалим 2 ребра, тогда из белых и синих вершин надо провести или $14 + 4 = 18$ ребер.

   Сделаем 9 красных вершин, проведем между ними все ребра — их степень станет 8. Из них надо провести $9 \cdot 2 = 18$ ребер.

   Осталось провести 18 ребер от красных вершин к синим и белым.

5. В школе два седьмых класса, в 7 «А» и 7 «Б» класса учится по 7 девочек. Каждая имеет хотя бы одну подружку в параллельном классе. Все девочки 7 «А» класса имеют разное число подруг из 7 «Б» класса. Но все девочки 7 «Б» класса имеют одинаковое количество подруг из 7 «А». Сколько?

   Ответ: 4.

   Решение. Девочки 7 «А» класса имеют разное число подруг из 7 «Б» класса — от 1 до 7. Значит, всего $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ пар подружек. Девочки 7 «Б» класса имеют одинаковое количество подруг из 7 «А» — по $28 : 7 = 4$ подруги.

   Комментарий. Рассмотрим граф: одна группа из 7 вершин — девочки одного класса, другая из 7 вершин — из другого. Ребро — дружба между девочками разных классов. Ребра соединяют только вершины разных групп. В решении сначала нашли сумму степеней вершин одной группы, эта сумма равна и сумме вершин другой группы.

6. Петя нарисовал граф, все вершины которого пронумерованы всеми двузначным числами от 10 до 99. Ребром соединены каждые две вершины, у которых разность номеров не равна 7. Вася отметил в графе N вершин и ребра между ними. У него получился полный граф (в нём любые две вершины соединены ребром). При каком наибольшем N такое возможно?

   Ответ: 48.

   Решение. Нужно найти наибольшее количество двузначных чисел можно выписать, чтобы никакие два из них не отличаются на 7.

   Есть 13 двузначных чисел, кратных 7: 14, 21, …, 98. Из них можно взять не более 7 чисел, так как соседние брать нельзя. Также по 7 штук из групп с остатками 1, 3, 4, 5 и 6 при делении на 7. В группе чисел с остатком 2 всего 12 чисел, их них можно взять не более 6 штук. Итого можно взять не более $7 \cdot 6 + 6 = 48$ чисел.

Приведем пример с 48 числами. Сделаем 13 групп: 10–16, 17–23, …, 87–93, 94–99 — 12 групп по 7 чисел и 1 группа с 6 числами. Возьмём 7 групп: № 1, № 3, …, № 13. В них $6 \cdot 7 + 6 = 48$ чисел. Никакие два из этих 48 чисел не дают разность 7: если они в одной группе, то разность меньше 7, если из разных, то больше 7.

7. В графе N вершин, пять из которых имеют степень 2023. При каком наименьшем N возможно?

Ответ: 2024.

Решение. Кроме любой вершины степени 2023 должно быть еще 2023 вершин. Значит, есть по крайней мере 2024 вершины. Пример очевиден: возьмем 2024 вершины и из пяти из них проведен ребра во все остальные вершины.

8. Прошёл однокруговой футбольный турнир. В нём приняли участие 10 команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Победитель набрал 14 очков, четыре команды набрали по 9 очков, три — по 8 очков, одна команда набрала 3 очка и одна — 2. Сколько ничьих было на турнире?

Ответ: такое невозможно.

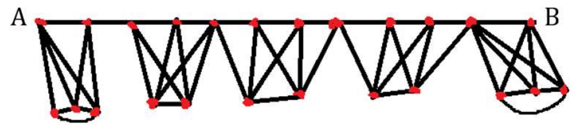
Решение. Всего было $10 \cdot 9 : 2 = 45$ матчей, в каждом при ничейном результате распределяли 2 очка, иначе — 3 очка. Значит, разыграно не менее $45 \cdot 2 = 90$ очков. Но по условию команды получили только $14 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 3 + 2 = 79$ очков. Значит, такое невозможно.

9. В некоторой стране 24 города. Каждая дорога соединяет 2 города страны. Дороги не пересекаются. Из каждого города выходит не менее 4 дорог. Из любого города можно добраться по дорогам в любой другой город. Чтобы проехать из города А в город Б этой страны надо проехать не менее чем через N других городов. Какое наибольшее значение может иметь N?

Ответ: 10.

Решение. Покажем, что промежуточных городов не более 10. Пусть их хотя бы 11. Тогда в цепочке 13 городов, начиная с А и заканчивая В. Отметим в ней 5 городов, идущих через два. Они не имеют «общих знакомых», иначе есть более короткая цепочка между А и В. Но у городов А и В есть еще по три соседних города, а у трех остальных — по 2 у каждого. Итого нужно еще 12 городов, а у нас осталось 11. Противоречие.

Пример с 10 промежуточными городами показан на рисунке.



10. Вершинами графа являются 6 вершин шестиугольника и еще 3 точки внутри него. Ребра графа — отрезки. Это все стороны шестиугольника и еще несколько непересекающихся отрезков внутри шестиугольника. Ребра разбивают весь шестиугольник на треугольники. Сколько ребер может быть в этом графе?

Ответ: 18.

Указание. На любом примере можно убедиться, что ребер 18. Интересно, что возможных рисунков много, а количество ребер всегда одно и то же. В решении задачи докажем это.

Решение. Покажем, что ребер всегда 18. Пусть получилось n треугольников. Сумма их углов $180°n$. С другой стороны, эти углы образуют углы шестиугольника (их сумма $4 \cdot 180°$) и по $360°$ около каждой из трёх точек внутри шестиугольника. Значит, $180°\,n = 4 \cdot 180° + 3 \cdot 360° = 10 \cdot 180°$, $n = 10$. У 10 треугольников 30 сторон — это внутренние отрезки, посчитанные дважды, и стороны шестиугольника. Значит, всего $(30 + 6) : 2 = 18$ отрезков.

11. Турнир по игре «Камень, Ножницы, Бумага» проходил по олимпийской системе. В каждой партии играли двое, проигравший выбывал. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Оставшийся объявляется победителем. В турнире приняли участие 5 мальчиков и 5 девочек. Победителем турнира стала девочка. Какое наименьшее количество партий могли выиграть девочки?

Ответ: 1.

Решение. Так как победила девочка, то она выиграла последнюю партию. В остальных партиях могли выигрывать мальчики. Приведем пример. Выделим одного мальчика и одну девочку. Пусть сначала мальчик выиграет у всех остальных, а в последней партии проиграет этой девочке.

12. Турнир по игре «Камень, Ножницы, Бумага» проходил по олимпийской системе. В каждой партии играли двое, проигравший выбывал. Турнир заканчивается, когда выбыли все игроки, кроме одного. Оставшийся объявляется победителем. В турнире приняли участие 5 мальчиков и 5 девочек. Победителем турнира стала девочка. Какое наибольшее количество партий могло быть между мальчиком и девочкой?

Ответ: 9.

Решение. Всего 10 участников, с каждой партией выбывает один. Остался только победитель. Значит, сыграно $10 - 1 = 9$ партий. Во всех партиях мальчик может играть с девочкой. Приведем пример. Выстроим всех в ряд: М-Д-М-Д-М-Д-М-Д-М-Д. Пусть играют пары слева направо, выигрывает тот, кто в ряду справа. Играют всегда мальчик с девочкой, в конце выиграет девочка.

13. В шахматном турнире среди учеников математического класса приняли участие 13 человек. Каждый сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью — 0,5 очков, за проигрыш — 0. Евгений проиграл только один раз, но набрал меньше всех очков. Александр занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Евгений мог отстать от Александра?

    Ответ: 1.

    Решение. Всего сыграно $13 \cdot 12 : 2 = 78$ партий, в каждой распределял 1 очко, то есть все участники в сумме имеют 78 очков. По условию Евгений проиграл одну партию, поэтому с 11 участниками он сыграл либо вничью, либо выиграл. Значит, он набрал не менее 5,5 очков. Следовательно, каждый из остальных набрал не менее 6 очков, а все шахматисты в сумме набрали не менее $12 \cdot 6 + 5{,}5 = 77{,}5$ очков. Это возможно только в случае, если занявший первое место Александр набрал не 6 очков, а 6,5 очков. Разрыв между Евгением и Александром равен $6{,}5 - 5{,}5 = 1$ очко.

14. На окружности отмечено 5 точек. Леонид рисует граф: его вершинами являются всевозможные треугольники с вершинами в этих точках, ребром соединяются те вершины, которым соответствуют треугольники, имеющие общую вершину. Сколько ребер в графе, нарисованном Леонидом?

    Ответ: 45.

    Решение. Всего есть 10 треугольников с вершинами в данных точках. Любые два имеют общую вершину, поэтому граф полный (в нём проведены все ребра). Таких ребер $10 \cdot 9 : 2 = 45$.

15. На окружности отмечено 6 точек. Леонид рисует граф: его вершинами являются всевозможные треугольники с вершинами в этих точках, ребром соединяются те вершины, которым соответствуют треугольники, имеющие общую вершину. Сколько ребер в графе, нарисованном Леонидом?

    Ответ: 180.

    Решение. Всего есть 20 треугольников с вершинами в данных точках. Они разбиваются на 10 пар: каждому треугольнику соответствует единственный, с которым не совпадает ни одна из вершин.

    Когда составляют граф, то в нём 20 вершин. Между любыми двумя вершинами графа есть ребро, кроме 10, соответствующих указанным выше парам

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2022–2023 учебный год

треугольников. Всего между 20 вершинами можно провести $20 \cdot 19 : 2 = 190$ ребер, искомое число равно $190 - 10 = 180$.