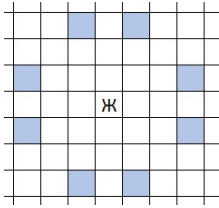


## Блок 3. Графы

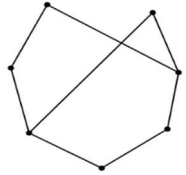
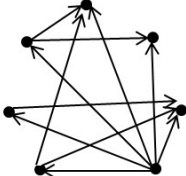
### Интернет-карусель (2022–2023)

#### Задания

Граф состоит из вершин, любые две из которых либо соединены одним ребром, либо не соединены. Две вершины *связны*, если есть путь по ребрам от одной вершины до другой. *Компонента связности* графа — это часть вершин графа (и ребра между ними), которые попарно связны между собой, но не связны с вершинами вне этой части.

1. Дана антипризма — многогранник, у которого есть 2 параллельные грани, являющиеся правильными 57-угольниками, и каждая вершина этих граней соединена ребрами ровно с 2 вершинами другого основания. У такого многогранника 114 вершин. Сколько у него ребер?
2. В графе 100 вершин. Девять из них имеют степень 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, остальные — одинаковую степень  $N$ . В графе 341 ребро. Чему равно  $N$ ?
3. Петя написал в ряд несколько чисел от 1 до 25 (среди них нет равных). Любые два соседних числа имеют общий делитель, больший 3. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?
4. Шахматная фигура жираф ходит на три клетки в любом направлении и одну в перпендикулярном. На рисунке показано, в какие клетки (отмечены синим) может попасть такая фигура, расположенная в клетке, отмеченной буквой «Ж».  


Дана шахматная доска  $8 \times 8$ . Нарисовали граф, вершинами которого являются клетки доски. Две вершины соединены ребром, когда из одной клетки жираф может попасть в другую за 1 ход. Сколько компонент связности у полученного графа?
5. Клетки поля  $5 \times 5$  окрашены в шахматном порядке. Фигуру жираф (см. предыдущую задачу) поставили в белую клетку, соседнюю (по стороне) с угловой. Сколькими способами жираф может обойти все 12 белых клеток на этой доске и последним ходом вернуться на исходную клетку?
6. Шесть вершин связного графа имеют степени 5, 4, 2, 2, 2, 2, а остальные вершины (если они есть) имеют степень 1. Какое наименьшее количество ребер может быть в таком графе?
7. Какое наибольшее количество ребер может быть в графе, описанном в предыдущей задаче?

8. В графе 100 вершин и 57 компонент связности. При каком наименьшем числе ребер такое возможно?
9. Дан граф с 10 вершинами, степень каждой вершины равна 3. На каждом ребре стоит стрелка в одном из 2 направлений. Назовём вершину финишной, если на всех 3 ребрах, из неё выходящих, стрелки ведут к самой вершине. Какое наибольшее число финишных вершин может быть в таком графе?
10. Дан граф с 20 вершинами, степень каждой вершины равна 4. На каждом ребре стоит стрелка в одном из 2 направлений. Назовём вершину стартовой, если на всех 4 ребрах, из неё выходящих, стрелки ведут от самой вершины. Какое наибольшее число стартовых вершин может быть в таком графе?
11. На рисунке показана система дорог, соединяющая 7 городов (отмеченных точками). Сколькими способами можно закрыть несколько дорог, чтобы по-прежнему из любого города можно было проехать в любой другой?  

12. Магазин «Плохое и Хорошее» провел акцию «Принеси три крышечки от любимого напитка и обменяй их на четвертую крышечку». Николай 12 раз поучаствовал в этой акции. После этого у него осталась одна последнюю крышечка, которую он съел в рамках флешмоба «Помоги природе». А сколько крышечек было у Николая до начала акции магазина?
13. У графа 8 вершин, степень каждой из которых равна 6. Сколько в этом графе может быть треугольников, то есть троек вершин, попарно соединённых ребрами?
14. В вершинах графа расставлены натуральные числа, не большие  $N$ . Если одно число делится на другое, то поставлена стрелка от того, что делит, к тому, которое делится. Если ребро между числами не проведено, то ни одно из них не делится на другое. При каком наименьшем  $N$  такое возможно?  

15. Сколько существует разных графов с 9 вершинами и 42 ребрами?